Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс

В трех частях

Часть 2

Функции многих переменных

Гомель
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

2009

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук,

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.

Д 332 Математический анализ : учебно - методический комплекс для студентов физического факультета: Ч.2 Функции многих переменных / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образ. РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – 287 с.

Вторая часть учебно-методического комплекса содержит материал по темам непрерывность и дифференцируемость функции многих переменных, криволинейные, кратные и поверхностные интегралы; векторный анализ; интегралы, зависящие от параметра, которые являются составляющими учебной программы дисциплины «Математический анализ» во втором семестре на физическом факультете.

Для студентов и преподавателей физического факультета вуза.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

университет им. Ф. Скорины», 2009

Содержание

Введение

Данное издание является второй частью учебно-методического комплекса «Математический анализ» для физических специальностей. Здесь излагается материал по темам: непрерывность и дифференцируемость функции многих переменных, криволинейные, кратные и поверхностные интегралы; векторный анализ; интегралы, зависящие от параметра, которые являются составляющими учебной программы излагаемой дисциплины второго семестра.

Структура учебно-методического комплекса аналогична первой части:

– примерный тематический план;

– краткий лекционный курс;

– вопросы для самоконтроля;

– примерные задания к практическим занятиям с решениями типовых примеров;

– примерные задания контрольных работ и тестовые задания для рубежного контроля,

– примерный перечень вопросов и задач к экзамену;

– учебно-методический материал для проведения деловых игр.

Учебно-методический комплекс предназначен для организации учебного процесса по курсу «Математический анализ» на физическом факультете университета. Изложенные вопросы разделов математического анализа могут быть использованы студентами для самостоятельной подготовки по данному предмету.

Учебная программа курса «Математический анализ»

Раздел 1 Теория рядов (продолжение)

Тема 4 Функциональные ряды

Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Геометрический смысл поточечной сходимости функциональных последовательностей. Геометрический смысл равномерной сходимости функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей. Функциональные ряды. Поточечная сходимость функциональных рядов. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Вейерштрасса. Признаки Дирихле и Абеля. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Тема 5 Степенные ряды

Определение степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара. Интервал сходимости. Область сходимости. Свойства сходящихся степенных рядов. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость степенных рядов.

Тема 6 Ряд Тейлора

Определения ряда Тейлора. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Приложения степенных рядов. Использование ряда Тейлора для вычисления пределов, для вычисления приближенных значений функции, для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Раздел 2 Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Тема 1 Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение n-мерного пространства. n-мерное арифметическое точечное пространство. Метрика. Свойства метрики. Метрическое пространство. Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве. Полнота пространства. Основные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые шары. Открытые и замкнутые параллелепипеды. Окрестности Замкнутые множества. Открытое множество. Предельная точка. Изолированная точка. Ограниченное множество пространства $\mathbb{R}^n$. Связное множество. Компакт. Теорема Больцано- Вейерштрасса.

Тема 2 Предел функции многих переменных

Понятие функции многих переменных. Линии и поверхности уровня. Определение предела функции многих переменных. Свойства предела. Двойной предел. Повторные пределы. Теорема о существовании повторных пределов. Непрерывность функции многих переменных. Непрерывность сложной функции. Свойства непрерывных функций многих переменных.

Тема 3 Функции многих переменных, непрерывные на множествах

Непрерывность функции на компактах. Теорема Вейерштрасса. Функции, непрерывные на линейно связных множествах. Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора. Колебание функции. Диаметр множества.

Тема 4 Частные производные

Частные и полные приращения функции многих переменных. Частные производные. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности. Дифференцируемость функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

Тема 5 Дифференцирование сложной функции

Полный дифференциал функции многих переменных. Частные дифференциалы. Геометрический смысл полного дифференциала. Дифференцирование сложной функции. Полная производная. Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных.

Тема 6 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных. Символические формулы для вычисления дифференциалов высших порядков для функции двух переменных. Полный дифференциал функции многих переменных.

Тема 7 Формула Тейлора для функции многих переменных

Формула Тейлора для функции двух переменных с остаточным членом в виде Лагранжа. Формула Тейлора для функции двух переменных с остаточным членом в виде Пеано. Формула Маклорена для функции двух переменных. Примеры разложения функции двух переменных по формуле Тейлора и Маклорена.

Тема 8 Экстремум функции многих переменных

Понятие экстремума функции многих переменных. Необходимое условие локального экстремума. Некоторые сведения о квадратичных формах. Положительно определенная и отрицательно определенная квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных. Исследование на локальный экстремум функций.

Тема 9 Дифференцирование неявной функции

Неявные функции, задаваемые одним уравнением. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением. Неявные функции, задаваемые системой уравнений. Матрица Якоби и якобиан системы функций. Зависимость функций. Достаточное условие независимости.

Тема 10 Условный экстремум

Понятие условного экстремума. Уравнения связи. Методы отыскания условного экстремума. Метод исключения части переменных. Метод множителей Лагранжа. Правило нахождения точек условного экстремума. Глобальный экстремум функции многих переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

Раздел 3 Интегральное исчисление функции многих переменных

Тема 1 Криволинейные интегралы 1-го рода

Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода. Задача о массе материальной линии. Задача о площади цилиндрической поверхности. Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода. Приложения криволинейного интеграла 1-го рода.

Тема 2 Криволинейные интегралы 2-го рода

Задача о работе переменной силы. Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода. Криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру. Вычисление криволинейного интеграла 2-го ро. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода.

Тема 3 Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^n$

Клетки и клеточные множества в $\mathbb{R}^n$. Определение клетки Мера клетки Свойства клеток. Клеточное множество. Свойства клеточных множеств. Множества измеримые по Жордану. Жорданова мера нуль Критерий измеримости множества в $\mathbb{R}^n$. Разбиение измеримых множеств. Свойства разбиений.

Тема 4 Определение и свойства двойного интеграла

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Задача о массе неоднородной пластины. Задача об объеме цилиндроида. Интегральная сумма Римана. Верхняя и нижняя суммы Дарбу. Определение двойного интеграла. Необходимое условие интегрируемости. Достаточное условие интегрируемости. Критерий интегрируемости Дарбу. Основные свойства двойного интеграла.

Тема 5 Сведение двойного интеграла к повторному

Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику. Доказательство формулы сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику. Примеры вычисления двойных интегралов по прямоугольнику. Сведение повторного интеграла по элементарной области. Доказательство формулы сведения повторного интеграла по элементарной области. Примеры вычисления двойных интегралов по элементарной области.

Тема 6 Замена переменных в двойном интеграле

Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Якобиан отображения. Геометрический смысл знака якобиана. Криволинейные координаты. Переход к полярным координатам. Примеры вычисления двойных интегралов посредством замены переменных.

Тема 7 Формула Грина

Связь двойных и криволинейных интегралов 2-го рода по замкнутому контуру. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Примеры вычисления криволинейных интегралов 2-го рода с помощью формулы Грина.

Тема 8 Приложения двойного интеграла

Геометрические приложения двойного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление площади поверхности. Вычисление объема тела. Физические приложения двойного интеграла. Вычисление массы материальной фигуры. Вычисление статистических моментов. Вычисление координат центра масс. Вычисление моментов инерции.

Тема 9 Определение и свойства тройного интеграла

Задача о массе пространственного тела. Интегральная сумма Римана. Определение тройного интеграла. Свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному интегралу. Примеры вычисления тройных интегралов по параллелепипеду и по элементарной области.

Тема 10 Замена переменных в тройном интеграле

Формула замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические координаты. Примеры вычисления тройных путем перехода к цилиндрическим координатам. Сферические координаты. Примеры вычисления тройных интегралов путем перехода к сферическим координатам. Приложения тройного интеграла.

Тема 11 Элементы теории поверхностей

Понятие поверхности. Способы задания поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Длина кривых на поверхности. Площадь поверхности. Вторая квадратичная форма. Ориентация поверхности.

Тема 12 Поверхностный интеграл 1-го рода

Задача о массе изогнутой пластины. Определение поверхностного интеграла 1-го рода. Свойства поверхностного интеграла 1-го рода. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода. Примеры вычисления поверхностных интегралов 1-го рода. Приложения поверхностного интеграла 1-го рода.

Тема 13 Поверхностный интеграл 2-го рода

Задача о потоке жидкости. Определение поверхностного интеграла 2-го рода. Свойства поверхностного интеграла 2-го рода. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода. Примеры вычисления поверхностных интегралов 2-го рода. Связь поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода.

Тема 14 Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса

Связь между поверхностными и тройными интегралами. Формула Остроградского Гаусса. Примеры вычисления поверхностных интегралов сведением к тройным интегралам. Связь между поверхностными и криволинейными интегралами. Формула Стокса. Примеры вычисления криволинейных интегралов сведением к поверхностным.

Тема 15 Скалярные поля

Понятие о задачах векторного анализа и теории поля. Определение скалярного поля. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Производная по направлению Градиент скалярного поля.

Тема 16 Векторные поля

Определение векторного поля. Векторные линии. Поток векторного поля. Физический смысл потока. Дивергенция векторного поля. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса.

Тема 17 Специальные виды векторных полей

Потенциальное векторное поле. Свойства потенциальных полей. Соленоидальное векторное поле. Свойства соленоидальных полей Гармоническое поле. Операторы Гамильтона и его свойства. Оператор Лапласа и его свойства.

Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра

Тема 1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определение собственного интеграла, зависящего от параметра. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра. Предельный переход под знаком интеграла. Дифференцирование по параметру собственных интегралов, зависящих от параметра. Правило Лейбница. Интегрирование по параметру собственных интегралов, зависящих от параметра.

Тема 2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Несобственного интеграла, зависящего от параметра. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрируемость по параметру несобственного интеграла, зависящего от параметра. Дифференцируемость по параметру несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Тема 3 Интегралы Эйлера

Определение гамма функции. Свойства гамма функции. Формула понижения. Формула дополнения. Формулы Стирлинга. Определение бета функции. Свойства бета функции. Связь гамма и бета функций. Применение свойств интегралов, зависящих от параметра, к вычислению интегралов.

Тема 4 Интеграл Фурье

Представление функций интегралом Фурье. Главное значение интеграла. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Формула обращение. Синус и косинус преобразования Фурье. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье от производной. Дифференцирование преобразования Фурье. Свертка функций. Свойства свертки.

Тема 5 Обобщенные функции

Определение функции Дирака. Носитель функции. Финитные функции. Пространство основных функций. Обобщенные функции. Пространство обобщенных функций. Операции над обобщенными функциями. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Производная обобщенной функции. Операция сдвига аргумента для обобщенной функции.

Тематический план

Учебный процесс по курсу осуществляется в виде лекций, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, самостоятельной учебной работы студентов. Итоговой формой контроля знаний является зачет и экзамен. Распределение часов по разделам и темам во 2-ом семестре представлено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Примерное распределение часов по разделам и темам курса

Номер раздела, темы, занятия	**Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов**	**Всего часов**	**Количество аудиторных часов**		
			лекции	**практические (семинарские) занятия**	**лабораторные занятия**
1	2	3	4	5	6
1	**Раздел 1 Теория рядов**	**14**			
1.4	Функциональные ряды	4	2	2	–
1.5	Степенные ряды	4	2	2	–
1.6	Ряд Тейлора	6	2	4	–
2	**Раздел 2 Дифференциальное исчисление функции многих переменных**	**38**			
2.1	Пространство $\mathbb{R}^n$	2	2	–	–
2.2	Предел функции многих переменных	4	2	2	–
2.3	Функции многих переменных, непрерывные на множествах	2	2	–	–
2.4	Частные производные	4	2	2	–
2.5	Дифференцирование сложной функции	4	2	2	–
2.6	Частные производные и дифференциалы высших порядков	4	2	2	–
2.7	Формула Тейлора для функции многих переменных	4	2	2	–
2.8	Экстремум функции многих переменных	4	2	2	–
2.9	Дифференцирование неявной функции	4	2	2	–

2.10	Условный экстремум	6	2	4	–
3	**Раздел 3 Интегральное исчисление функции многих переменных**	**86**			
3.1	Криволинейные интегралы 1-го рода	4	2	2	–
3.2	Криволинейные интегралы 2-го рода	4	2	2	–
3.3	Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^n$	2	2	–	–
3.4	Определение и свойства двойного интеграла	4	2	2	–
3.5	Сведение двойного интеграла к повторному	4	2	2	–
3.6	Замена переменных в двойном интеграле	4	2	2	–
3.7	Формула Грина	4	2	2	–
3.8	Приложения двойного интеграла	4	2	2	–
3.9	Определение и свойства тройного интеграла	4	2	2	–
3.10	Замена переменных в тройном интеграле	4	2	2	–
3.11	Элементы теории поверхностей	4	2	2	–
3.12	Поверхностный интеграл 1-го рода	4	2	2	–
3.13	Поверхностный интеграл 2-го рода	4	2	2	–
3.14	Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса	4	2	2	–
3.15	Скалярные поля	4	2	2	–
3.16	Векторные поля	4	2	2	–
3.17	Специальные виды векторных полей	4	2	2	–
4	**Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра**	**20**			
4.1	Собственные интегралы, зависящие от параметра	4	2	2	–
4.2	Несобственные интегралы, зависящие от параметра	4	2	2	–
4.3	Интегралы Эйлера	4	2	2	–
4.4	Интеграл Фурье	4	2	2	–
4.5	Обобщенные функции	2	2	–	–
	Всего часов за 2-й семестр	**138**	**70**	**68**	

Краткий лекционный курс

Раздел 1 Теория рядов

Материал лекций изложен в части 1 учебно-методического комплекса «Функции действительной переменной. Ряды»

***Раздел 2* Дифференциальное исчисление функции многих переменных**

Тема 1 Пространство $\mathbb{R}^n$

1.1 Определение n-мерного пространства

1.2 Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве

1.3 Основные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$

1.4 Компакт

1.1 Определение n-мерного пространства

n*-мерным арифметическим точечным пространством* называется множество всех упорядоченных наборов ($x_1;x_2;...;x_n$) действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n и обозначается $\mathbb{R}^n$; его элементы – *точками* пространства $\mathbb{R}^n$; числа x_1, x_2, ..., x_n – *координатами* точки ($x_1;x_2;...;x_n$).

Точки пространства $\mathbb{R}^n$ обозначаются $M(x_1;x_2;...;x_n)$ или $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Точка $O(0;0;...;0)$ называется *началом координат*.

*Расстояние*м (*метрикой*) $\rho(x,x')$ между двумя точками $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $x'=(x_1';x_2';...;x_n')$ называется число

$$\rho(x;x')=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2}\ .$$

При $n=1$ имеем пространство $\mathbb{R}^1$ (прямая) с расстоянием:

$$\rho(x,x')=\left|x_1-x_1'\right|;$$

при $n=2$ имеем пространство $\mathbb{R}^2$ (плоскость) с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2}\ ;$$

при $n=3$ имеем пространство $\mathbb{R}^3$ с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{\left(x_1-x_1^{'}\right)^2+\left(x_2-x_2^{'}\right)^2+\left(x_3-x_3^{'}\right)^2}\ .$$

Арифметическое n-мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называется *метрическим (евклидовым) пространством* $\mathbb{R}^n$.

1.2 Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве

Пусть (x_m), $x_m=\left(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m\right)$, – последовательность точек метрического пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что последовательность точек (x_m) *сходится* к точке a, $a=(a_1;a_2;...;a_n)$ (имеет *предел* a), если $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m;a)=0$:

$$\lim_{m\to\infty}x_m=a\,.$$

Для того чтобы последовательность точек (x_m), $x_m=\left(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m\right)$, сходилась к пределу $a=(a_1;a_2;...;a_n)\in$ $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\lim_{m\to\infty}x_1^m=a_1,\ \lim_{m\to\infty}x_2^m=a_2\,,\ ...\,,\ \lim_{m\to\infty}x_n^m=a_n\,.$$

Для последовательностей пространства $\mathbb{R}^n$ имеют место аналогичные определения и свойства как и для последовательностей пространства $\mathbb{R}^1$.

Если последовательность точек (x_m) метрического пространства $\mathbb{R}^n$ сходится, то она является фундаментальной. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

1.3 Основные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$

Множество точек $x=(x_1;x_2;...;x_n)\in$ $\mathbb{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n'^0\right)$ меньше положительного числа r, называется ε*-окрестностью* точки $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$:

$$U(\varepsilon, x_0) = \{\ x \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon\ \}.$$

Данное множество называется n-мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Проколотой ε*-окрестностью* точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ с радиусом ε называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$:

$$\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid\ 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Пусть G – некоторое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Точка называется *внутренней точкой* множества G, если существует ее окрестность, целиком принадлежащая этому множеству. Множество G называется *открытым*, если все его точки внутренние. Любое открытое множество, содержащее точку $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, является ее окрестностью. Точка называется *граничной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Множество граничных точек называется *границей* множества G и обозначается ∂G. Граничная точка может, как принадлежать множеству G, так и не принадлежать ему. Точка называется *предельной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества G. Точка, не являющаяся предельной точкой множества G, называется *изолированной*.

1.4 Компакт

Множество G называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, которое получается, если присоединить к множеству G все его предельные точки, называется замыканием G и обозначается $\overline{G}$. Множество G называется *ограниченным*, если существует такой n-мерный шар, который содержит внутри себя все точки множества G. Множество G называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Множество

$$\Gamma = \{\ (x_1; x_2; ...; x_n) \mid x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t); \alpha \le t \le \beta\ \},$$

называется *непрерывной кривой*, соединяющей точки $P_1(x_1(\alpha); x_2(\alpha); ...; x_n(\alpha))$ и $P_2(x_1(\beta); x_2(\beta); ...; x_n(\beta))$. Здесь

$x_i(t)$, $i=1,2,...,n$, непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Множество G называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой Γ, целиком принадлежащей этому множеству. Открытое связное множество называется *областью*, объединение области и ее границы называется *замкнутой областью*.

Тема 2 Предел функции многих переменных

2.1 Понятие функции многих переменных
2.2 Определение предела функции многих переменных
2.3 Повторные пределы
2.4 Непрерывность функции многих переменных

2.1 Понятие функции многих переменных

Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$. Если правило f каждой точке $x=(x_1;x_2;...;x_n)\in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(x_1,x_2,...,x_n)$, то говорят, что на множестве G задана *числовая функция (*или *отображение) f от n переменных*:

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}.$$

Множество G называется *областью определения* и обозначается $D(f)=G$; множество $E=\{\,u\in\mathbb{R}^n \mid u=f(x),\ x\in G\,\}$ *– множеством значений функции f*.

В частном случае при $n=2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точек плоскости $\mathbb{R}^2$. Частное значение функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначается $f(x_0,y_0)$, $f(M_0)$, $f\big|_{(x_0;y_0)}$ и $f\big|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z=f(x,y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma=\{\,(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x,y)\,\},$$

которое есть некоторая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Функцию трех и более переменных изобразить графически затруднительно.

Функции многих переменных задаются:

– явно уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной:

$$z = f(x, y),\ u = f(x, y, z),\ u = f(x_1, x_2,..., x_n);$$

– неявно уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной:

$$F(x; y) = 0\ ),\ F(x; y; z) = 0,\ F(x_1; x_2; ...; x_n) = 0.$$

Множество точек $x = (x_1, x_2,..., x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, x_2,..., x_n) = c$, называется *множеством уровня* функции $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$, соответствующим данному значению c.

При $n = 2$ множество уровня называется *линией уровня*; при $n = 3$ множество уровня называется *поверхностью уровня*; при $n > 3$ множество уровня называется *гиперповерхностью уровня*.

2.2 Определение предела функции многих переменных

Число A называется *пределом* (по Гейне) функции $f(x)$, $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если для любой последовательности точек (x_m), $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$, $m = \overline{1, \infty}$, $x_m \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $(f(x_m))$ значений функции сходится к A:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_m)_{m=1}^{\infty},\ x_m \in U(\varepsilon, x_0),\ \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \lim_{k\to\infty} f(x_m) = f(x_0).$$

Предел функции также обозначается:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ .... \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2,..., x_n) \text{ и } A = \lim_{M \to M_0} f(M),$$

где $M\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ точки пространства $\mathbb{R}^n$.

Аналогично функции одной переменной, определение предела по Гейне функции многих переменных на языке последовательностей эквивалентно определению предела по Коши.

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $f(x)$, $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, в точке $x_0=\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любой точки $x\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$ выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$:

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0):\ \forall x\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)\quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Если функция двух переменных $f(x;y)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}(\varepsilon;(x_0, y_0))$ и число A является пределом при $(x, y)\to(x_0, y_0)$, то предел

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$$

называется *двойным пределом*.

Геометрически неравенство $\left|f(x;y)-A\right|<\varepsilon$ означает, что точки графика функции $f(x,y)$ для $(x;y)\in\overset{\circ}{U}\left(\delta,(x_0;y_0)\right)$ находятся между двумя плоскостями $z=A-\varepsilon$ и $z=A+\varepsilon$, т. е. предел функции $f(x;y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$ определяется поведением функции вблизи точки $(x_0;y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций одной переменной (кроме тех, где существенна упорядоченность точек числовой прямой, например, односторонние пределы).

Бесконечные пределы для функций многих переменных $f(x)$, $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной.

Например,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0):\ \forall x\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)\quad f(x)>\varepsilon .$$

2.3 Повторные пределы

Пусть функция $f(x,y)$ задана в окрестности точки (x_0, y_0) за исключением, быть может, самой точки (x_0, y_0). И пусть для каждого фиксированного y из этой окрестности при $x \to x_0$ для функции $z = f(x,y)$ одной переменной x существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y_{\text{фик}}}} f(x;y) = g(y)$, а при $y \to y_0$ для функции $g(y)$ существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = b$. Тогда говорят, что существует *повторный предел* b для функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x;y) = b.$$

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x;y)$.

Теорема 1 Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой точке двойной предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = b$. И пусть для любого фиксированного x из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x_{\text{фик}}}} f(x;y) = h(x)$ и для любого фиксированного y из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y_{\text{фик}}}} f(x;y) = g(y)$. Тогда повторные пределы $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x;y)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x;y)$ существуют и равны:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x;y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x;y).$$

2.4 Непрерывность функции многих переменных

Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, определенная в окрестности $U(\delta, x_0)$ точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

В противном случае точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f\left(x\right)$.

В частности, для функции $f\left(x,y\right)$ точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва, а для функции $f(x,y,z)$ точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства непрерывных функций одной переменной.

Тема 3 Функции многих переменных, непрерывные на множествах

3.1 Непрерывность функции на компактах
3.2 Теорема Вейерштрасса
3.3 Равномерная непрерывность функций
3.4 Теорема Кантора

3.1 Непрерывность функции на компактах

Пусть функция $f\left(x\right)$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in\ \mathbb{R}^n$, определена на множестве $G\subset\mathbb{R}^n$. Функция $f\left(x\right)$ называется непрерывной на множестве G, если в каждой точке этого множества она непрерывна:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\quad \forall\ x_0\in G.$$

3.2 Теорема Вейерштрасса

Теорема 1 (Вейерштрасса) Функция $f\left(x\right)$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, *непрерывная на компакте* $G\in\mathbb{R}^n$ *ограничена и принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения:*

$$M=\sup_{x\in G} f\left(x\right),\ m=\inf_{x\in G} f\left(x\right).$$

Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними. Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.

3.3 Равномерная непрерывность функций

Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,..., x_n)$, называется *равномерно-непрерывной* на множестве G, $G \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых двух точек $x^{'} = (x_1^{'}; x_2^{'};...; x_n^{'})$ и $x^{''} = (x_1^{'}; x_2^{''};...; x_n^{''})$ множества G, находящихся на расстоянии, меньшем δ, выполняется неравенство $\left|f(x^{'}) - f(x^{''})\right| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x^{'}, x^{''} \in G \;\; \rho(x^{'}, x^{''}) < \delta \quad \left|f(x^{'}) - f(x^{''})\right| < \varepsilon .$$

Функция, непрерывная на множестве, не обязательно будет равномерно непрерывной на этом множестве.

Построим отрицание: функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,..., x_n)$, *не является равномерно-непрерывной* на множестве G, если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ существуют элементы $x^{'} = (x_1^{'}; x_2^{'};...; x_n^{'})$ и $x^{''} = (x_1^{'}; x_2^{''};...; x_n^{''})$ множества G такие, что $\rho(x^{'}, x^{''}) < \delta$, но $\left|f(x^{'}) - f(x^{''})\right| \geq \varepsilon$.

3.4 Теорема Кантора

Теорема 2 (Кантора) Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,..., x_n)$, непрерывная на компакте G, $G \in \mathbb{R}^n$, равномерно-непрерывна на этом компакте.

Колебанием $\omega(f;G)$ функции $u = f(x)$, $x=(x_1,x_2,..., x_n) \in G$, называется верхняя грань всевозможных разностей значений функции f:

$$\omega(f;G) = \sup_{x;x^{'} \in G} \left|f(x^{'}) - f(x)\right|, \; x^{'} = (x_1^{'}; x_2^{'};...; x_n^{'}) \in G .$$

Диаметром множества G называется верхняя грань расстояний между точками множества $G \in \mathbb{R}^n$.

Обозначается: $\operatorname{diam} G = \sup\limits_{x;x^{'} \in G} \rho(x^{'};x)$ или $\mathrm{d}(G) = \sup\limits_{x;x^{'} \in G} \rho(x^{'};x)$.

Равномерная непрерывность функции $u = f(x)$, $x=(x_1,x_2,..., x_n)$, на множестве $G \in \mathbb{R}^n$ означает, что колебание функции на любом множестве достаточного малого диаметра сколь угодно мало.

Теорема 3 (непрерывность сложной функции) *Пусть функции* $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, $t=(t_1,t_2,...,t_m)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0=\left(t_1^0;t_2^0;...;t_m^0\right)\in\mathbb{R}^m$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0=\left(x_1(t_0);x_2(t_0);...;x_n(t_0)\right)\in\mathbb{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t)=f\left(x_1(t);x_2(t);...;x_n(t)\right)$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

Тема 4 Частные производные

4.1 Частные и полные приращения функции многих переменных
4.2 Частные производные
4.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных
4.4 Дифференцируемость функции многих переменных

4.1 Частные и полные приращения функции многих переменных

Пусть функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ определена в окрестности точки $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$. Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, …, x_n^0 оставим без изменения.

Частным приращением функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1}f(x_0)=f\left(x_1^0+\Delta x_1;x_2^0;...;x_n^0\right)-f\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2}f(x_0)$, $\Delta_{x_3}f(x_0)$, …, $\Delta_{x_n}f(x_0)$ по переменным x_2, …, x_n в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Полным приращением в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f\left(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right).$$

<u>Геометрически</u> для функции $f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$ частные и полное приращения

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рисунок 2. 1).

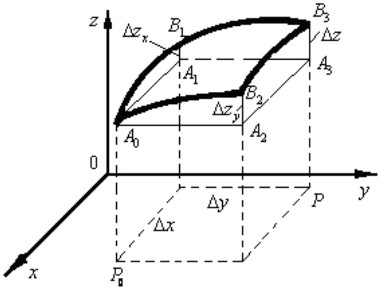

Рисунок 2. 1 – Геометрический смысл частных и полного приращений функции $f(x, y)$

4.2 Частные производные

Частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1} f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f\left(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0\right) - f\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)}{\Delta x_1}.$$

Для записи частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ используется также обозначение $f'_{x_1}\Big|_{x=x_0}$.

Аналогично определяются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

4.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных

Геометрический смысл частных производных. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, графиком которой является поверхность Ω. Точке $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$ на поверхности Ω соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y = y_0$. В сечении получается кривая $z = f(x; y_0)$ (на рисунке 2. 2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x; y_0)$ в плоскости $y = y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ (рисунок 2. 2).

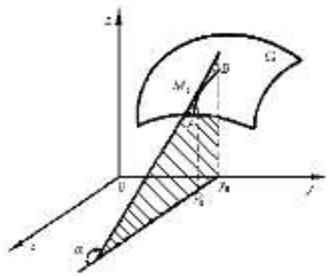

Рисунок 2. 2 – Геометрический смысл $\dfrac{\partial z\left(x;y\right)}{\partial x}$ в точке $P_0\left(x_0;y_0\right)$

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z=f(x,y)$ по y.

<u>Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</u> Графиком функции двух независимых переменных $z=f(x,y)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ является некоторая поверхность Ω (рисунок 2. 3). Выберем на ней точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

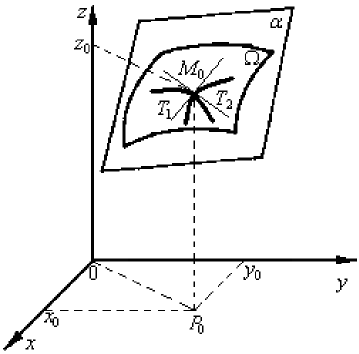

Рисунок 2. 3 – Касательная плоскость α к поверхности Ω

Касательной плоскостью к поверхности Ω в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости α к поверхности, проходящей через касательные T_1 и T_2 имеет вид

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

или

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

Нормалью к поверхности Ω в данной точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде:

$$\frac{(x-x_0)}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{(y-y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{(z-z_0)}{-1}.$$

Точка, в которой $F'_x=F'_y=F'_z=0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется *особой точкой поверхности*. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в данной точке $P_0(x_0;y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y=y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0,y_0)$ – в направлении прямой $x=x_0$ (относительно переменной y).

4.4 Дифференцируемость функции многих переменных

Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности $U(\delta;P_0)$ точки $P_0(x_0;y_0)$. Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P_0(x_0;y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

Данное равенство называется *условием дифференцируемости* функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. Здесь A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Условие дифференцируемости записывается также в виде:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0; y_0)$ и $P(x; y)$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

Функция $f(x, y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется *дифференцируемой на* G.

Слагаемое $A\Delta x + B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется *главной частью приращения функции*.

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности) Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$, причем $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны: из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x; y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми*.

Тема 5 Дифференцирование сложной функции

3.1 Полный дифференциал функции многих переменных
3.2 Геометрический смысл полного дифференциала

3.3 Дифференцирование сложной функции

3.4 Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных

3.1 Полный дифференциал функции многих переменных

Если функция $f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f\Big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции и называется *полным дифференциалом* функции:

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются *дифференциалами независимых переменных* x и y и обозначаются соответственно dx и dy .

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Выражения $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$ называются *частными дифференциалами* функции $f(x;y)$ и обозначаются $d_x f$ и $d_y f$.

Таким образом, $df = d_x f + d_y f$.

Для приближенных вычислений функции $f(x,y)$ в точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ при малых Δx и Δy используется формула

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

3.2 Геометрический смысл полного дифференциала

Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$, а левая его часть $z-z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z-z_0=df(x_0,y_0)$.

Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+...+(\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет вид

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

3.3 Дифференцирование сложной функции

Пусть $f(x,y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u и v:

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v).$$

Тогда функция $f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ является *сложной* функцией двух независимых переменных u и v. Переменные x и y называются *промежуточными переменными.*

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y), а функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u,v), то сложная функция $f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ дифференцируема в точке (u,v) и ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Для функции $f(x,y,z)$ трех переменных, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u, v, w:

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

частные производные сложной функции $f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Аналогично для функции n переменных, $n > 3$.

Для функции $f(x,y,z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ функции независимой переменной t, сложная функция $f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ является функцией одной переменной t. Производная

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

сложной функции $f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ называется *полной производной*.

3.4 Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных

Найдем полный дифференциал сложной функции $f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$. Подставим выражения $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, определяемые равенствами

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

в формулу полного дифференциала сложной функции двух переменных $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Получим

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

или

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv$, то

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv .$$

Видно, что форма записи полного дифференциала функции двух переменных не зависит от того, являются ли u и v независимыми переменными, или функциями других независимых переменных. Аналогичное утверждение имеет место и для функции $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$. В этом и заключается *инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных*.

Темы 6 Частные производные, дифференциалы высших порядков

6.1 Частные производные высших порядков

6.2 Теорема о равенстве смешанных производных

6.3 Дифференциалы высших порядков функции двух переменных

6.1 Частные производные высших порядков

Пусть функция $f\left(x,y\right)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в точке $(x;y)\in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называются *частными производными первого порядка*. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f\left(x,y\right)$ в точке $\left(x;y\right)$ и обозначаются:

$f''_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$f''_{xy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$f''_{yx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$f''_{yy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Если производные второго порядка являются непрерывными функциями, то их можно дифференцировать по переменным x и y. Получим частные производные третьего порядка и т. д. Частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется *частной производной* n*-го порядка* и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, … называются *смешанными производными*.

6.2 Теорема о равенстве смешанных производных

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Теорема 1 имеет место и для функции любого числа переменных.

Пусть $f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Выражение вида:

$$df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,$$

называется *дифференциалом первого порядка* функции $f(x,y)$.

6.3 Дифференциалы высших порядков функции двух переменных

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $(x;y) \in D(f)$, если он существует, называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается:

$$d^2 f = d(df).$$

Аналитическое выражение для $d^2 z$ имеет вид:

$$d^2 f = f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2.$$

Аналогично для *дифференциала третьего порядка* $d^3 f$:

$$d^3 f = d\left(d^2 f\right) =$$

$$= f'''_{xxx}(x,y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2 + 3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Функция f называется k *раз непрерывно дифференцируемой* в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Аналитическое выражение для дифференциала n-го порядка кратко записывается в виде символической формулы:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

Если $f(x,y)$ дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Темы 7 Формула Тейлора для функции многих переменных

7.1 Формула Тейлора для функции двух переменных
7.2 Формула Маклорена для функции двух переменных

7.1 Формула Тейлора для функции двух переменных

Теорема 2 (Тейлора) Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ непрерывна со всеми частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой δ-окрестности точки $(x_0;y_0)\in D(f)$. Тогда справедлива формула Тейлора::

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+R_n,$$

$$\text{где } R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta),\ x_0<\xi<x;\ y_0<\eta<y.$$

Следствие. *При условиях теоремы 2 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+o(\rho^n),$$

где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

7.2 Формула Маклорена для функции двух переменных

Если в формуле Тейлора положить $x_0=y_0=0$, то имеет место *формула Маклорена*:

$$f(x,y)=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(0,0)+R_n.$$

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

Тема 8 Экстремум функции многих переменных

8.1 Понятие экстремума функции многих переменных
8.2 Необходимое условие локального экстремума
8.3 Некоторые сведения о квадратичных формах

8.4 Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных

8.1 Понятие экстремума функции многих переменных

Пусть дана функция $f\left(x_1;x_2;...;x_n\right)=f\left(P\right)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Точка $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $f\left(P\right)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P\left(x_1;x_2;...;x_n\right)\in \overset{\circ}{U}\left(\delta;P_0\right)$ выполняется неравенство

$$f\left(P_0\right)>f\left(P\right)\quad \left(f\left(P_0\right)<f\left(P\right)\right),$$

значение $f\left(P_0\right)$ называют *локальным максимумом (минимумом)* функции и обозначается:

$$\max_{P\in \overset{\circ}{U}\left(\delta;P_0\right)} f\left(P\right)=f\left(P_0\right)\quad \left(\min_{P\in \overset{\circ}{U}\left(\delta;P_0\right)} f\left(P\right)=f\left(P_0\right)\right).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума* функции, а максимумы и минимумы функции – *экстремумами функции*.

Очевидно, что если функция $f\left(P\right)$ имеет в точке $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ локальный экстремум, то в случае локального максимума

$$\Delta f=f\left(P\right)-f\left(P_0\right)<0\ \ \forall\ \ P\left(x_1;x_2;...;x_n\right)\in \overset{\circ}{U}\left(\delta;P_0\right),$$

а в случае локального минимума –

$$\Delta f=f\left(P\right)-f\left(P_0\right)>0\ \ \forall\ \ P\left(x_1;x_2;...;x_n\right)\in \overset{\circ}{U}\left(\delta;P_0\right).$$

8.2 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума) Если в точке P_0 дифференцируемая функция $f\left(P\right)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n} = 0,$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Следствие. Если функция $f(P)$ *имеет в точке* P_0 *локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке* $du(P_0)$ *равен нулю или не существует.*

Точки, в которых выполняется необходимое условие, называются *стационарными.* Точки, в которых дифференциал функции равен нулю или не существует, называются *точками возможного экстремума* или *критическими*.

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$.

8.3 Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция вида

$$Q(x_1; x_2; \ldots; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

называется *квадратичной формой* от переменных x_1, x_2, ..., x_n, числа a_{ij}, $i, j = 1,2,\ldots,n$, называются *коэффициентами квадратичной формы*, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы*.

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется *симметричной.*

Главными минорами матрицы A называются определители:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется:

– *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных x_1, x_2, ..., x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения;

– *знакоопределенной*, если она является положительно определенной или отрицательно определенной;

– *квазизнакоопределенной*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$;

– *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 2 (критерий Сильвестра) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ldots .$$

Для функции $f(x_1; x_2; ...; x_n)$ второй дифференциал представляет собой квадратичную форму

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} dx_k dx_m$$

от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n.

8.4 Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума) Пусть функция $f(x_1;x_2;...;x_n) = f(P)$ *дифференцируема в некоторой окрестности точки* $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ *и дважды дифференцируема в самой точке* P_0*, причем* P_0 *– стационарная точка. Тогда*

1) если второй дифференциал $d^2 f\big|_{P_0}$ *является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных* dx_1, dx_2, ..., dx_n, *то функция* $f(P)$ *имеет в точке* P_0 *локальный минимум (максимум);*

2) если $d^2 f\big|_{P_0}$ *является знакопеременной квадратичной формой, то функция* $f(P)$ *в точке* P_0 *экстремума не имеет.*

В случае $df\big|_{P_0}=0$, а $d^2 f\big|_{P_0}$ является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция $f(P)$ может иметь в точке P_0 локальный экстремум, а может и не иметь.

В частности, для функции двух переменных $f(x;y)$ имеем теорему 4.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных) Пусть $P_0(x_0;y_0)$ *стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности* $U(\delta;P_0)$ *функции* $f(x;y)$. *И пусть*

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда точка $P_0(x_0;y_0)$ *является:*

1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$*;*

2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и*

$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$;

3) если $\Delta(P_0) < 0$*, то в стационарной точке* P_0 *локального экстремума нет,*

4) $\Delta(P_0) = 0$*, то локальный экстремум в стационарной точке* P_0 *может быть, а может и не быть.*

В случае $\Delta(P_0) = 0$ необходимо провести дополнительные исследования знака функции $f(x, y)$ в $U(\delta; P_0)$.

Тема 9 Дифференцирование неявной функции

9.1 Неявные функции, задаваемые одним уравнением
9.2 Неявные функции, задаваемые системой уравнений
9.3 Якобиан системы функций
9.4 Зависимость функций

9.1 Неявные функции, задаваемые одним уравнением

Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$.

Теорема 1 Пусть функция $F(x, y, z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\exists\ (x_0; y_0; z_0) : F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

2) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$;

3) $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ *и* $F'_z(x, y, z)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $(x_0; y_0; z_0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) *существует единственная непрерывная функция* $z = f(x, y)$*, удовлетворяющая уравнению* $F(x, y, z) = 0$ *и такая, что* $f(x_0, y_0) = z_0$.

Если функция $F(x, y, z)$ в условиях теоремы 1 дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то функция $z = f(x, y)$ также дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

Если уравнение поверхности Ω задано неявной функцией $F(x,y,z)=0$, то уравнение *касательной* плоскости α к поверхности имеет вид

$$F'_x\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0$$

и каноническое уравнение *нормали*:

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

9.2 Неявные функции, задаваемые системой уравнений

Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ F_2(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_m(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0. \end{cases}$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, ..., y_m есть

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;...;x_n), \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;...;x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_m = f_m(x_1;x_2;...;x_n), \end{cases}$$

и называется *совокупностью неявных функций*.

9.3 Якобиан системы функций

Определитель

$$J=\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

составленный из частных производных, называется *якобианом (определителем Якоби)* функций F_1, F_2, ..., F_m по переменным

y_1, y_2, ..., y_m.

Теорема 2 Пусть

1) функции F_1, F_2, ..., F_m *дифференцируемы в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0; y_1^0; y_2^0; ...; y_m^0\right)$,

2) частные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1,2,..., m$ *непрерывны в* P_0,

3) $F_1(P_0) = 0$, $F_2(P_0) = 0$, ..., $F_m(P_0) = 0$, $\left.\dfrac{D(F_1; F_2; ...; F_m)}{D(y_1; y_2; ...; y_m)}\right|_{P_0} \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки система уравнений $F_j\left(x_1; x_2; ...x_n; y_1; y_2; ...; y_m\right) = 0$, $j = 1, 2, ..., m$, *определяет единственную совокупность дифференцируемых неявных функций вида* $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$.

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$, ..., $\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i = 1,2,..., n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + ... + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \\ \text{.......... ....,} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + ... + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 2, якобиан отличен от нуля).

9.4 Зависимость функций

Пусть функции $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$ определены и дифференцируемы в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$, $m \leq n$. Функция $y_k = f_k\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$ называется *зависимой* в области G от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1; y_2; ...y_{k-1}; y_{k+1}; ...; y_m),$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Если ни одна из функций $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, не зависит от остальных, то система из этих функций называется *независимой* в G.

Теорема 3 (достаточное условие независимости) Пусть

1) функции $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$;

2) якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в этой точке.

Тогда функции $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, независимы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Следствие Если функции $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, зависимы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, то все якобианы $\dfrac{D\left(y_1; y_2; ...; y_m\right)}{D\left(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n}\right)}$ равны нулю в этой окрестности.

Тема 10 Условный экстремум

10.1 Понятие условного экстремума
10.2 Методы отыскания условного экстремума
10.3 Метод множителей Лагранжа
10.4 Глобальный экстремум функции многих переменных

10.1 Понятие условного экстремума

Рассмотрим функцию $f\left(P\right)$, $P\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$. Будем считать, что ее аргументы являются связанными между собой

$$\begin{cases} F_1\left(x_1; x_2; ...x_n\right) = 0, \\ F_2\left(x_1; x_2; ...x_n\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_k\left(x_1; x_2; ...x_n\right) = 0. \end{cases}$$

Данные соотношения называются *условиями связи.* Пусть координаты точки $P_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $f(P)$ имеет в точке $P_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ *условный минимум (максимум)* при условиях связи, если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in U(\delta; P_0)$, $P \neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (6.1), выполняется неравенство

$$f(P) > f(P_0) \qquad (f(P) < f(P_0)).$$

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

10.2 Методы отыскания условного экстремума

Рассмотрим методы нахождения условного экстремума функции $f(x, y)$, переменные x и y которой удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

Пусть требуется найти локальный экстремум функции $f(x, y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т. е. выразить y как функцию x: $y = y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $f(x, y)$ вместо y функцию $y(x)$, получается функция одной переменной $f(x, y(x))$. Для этой функции проводится исследование на локальный экстремум известными методами. Найденные экстремумы являются точками условного экстремума для функции $f(x, y)$. Аналогично поступают, если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т. е. x выразить как функцию y.

Если условие связи задается параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $f(x, y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

Если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных или представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

10.3 Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно переменной x или y.

Введем вспомогательную функцию, называемую *функцией Лагранжа*:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

где λ – некоторое действительное число, которое называется *множителем Лагранжа*.

Теорема 1 (Лагранжа) Пусть 1) функция $f(x,y)$ определена и дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $\varphi(x,y)=0$; 2) уравнение $\varphi(x,y)=0$ удовлетворяет в δ-окрестности точки P_0 условиям теоремы 2 практического занятия 3.

Тогда существует такое число λ, что выполняются условия Лагранжа:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0.$$

Согласно этой теореме для нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$ с уравнением связи $\varphi(x,y)=0$ необходимо:

– составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)$,

– найти точки $(x_k;y_k;\lambda_k)$ возможного экстремума функции Лагранжа;

– при фиксированном λ_k для дифференциала $d^2L(x_k;y_k;\lambda_k)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}d^2x+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}d^2y$ проверить условие $d^2L(x_k;y_k;\lambda_k)>0$. Если оно выполняется, то точка $(x_k;y_k;\lambda_k)$ является точкой условного экстремума функции $f(x,y)$.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

10.4 Глобальный экстремум функции многих переменных

Пусть функция $f(x,y)$ определена на компакте D. Тогда на нем она достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо внутри D, либо на границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения на компакте называются *точками глобального экстремума*. Если точка глобального экстремума функции является внутренней точкой области, то она является точкой локального экстремума, а если граничной, то – точкой условного экстремума. Следовательно, чтобы найти глобальные экстремумы функции $f(x;y)$ на компакте D, необходимо найти локальные и условные экстремумы функции, сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Дайте определения: а) n-мерного арифметического точечного пространства; б) расстояния в пространстве $\mathbb{R}^n$, в) n-мерного евклидова пространства.

2 Дайте определения окрестности и проколотой окрестности точки в пространстве $\mathbb{R}^n$.

3 Какая точка множества называется: а) внутренней; б) граничной; в) предельной; г) изолированной?

4 Какое множество называется а) открытым; б) замкнутым; в) компактом; г) связным; д) областью?

5 Что называется функцией в пространстве $\mathbb{R}^n$?

6 Что называется множеством уровня?

7 Сформулируйте определения предела функции $f(x,y)$ в точке по Гейне и по Коши.

8 Дайте для функции многих переменных определения бесконечных пределов:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=A$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$.

9 Сформулируйте определение повторного предела функции двух переменных.

10 Какая функция называется непрерывной в точке? Сформулируйте определение непрерывности функции на компактах.

11 Сформулируйте определение равномерной непрерывности функции.

12 Какое число называется колебанием функции $u=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$?

13 Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных?

14 Дайте определение частных производных.

15 Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.

16 Что называется полным дифференциалом функции многих переменных?

17 Какая функция называется неявной?

18 Что называется совокупностью неявных функций, определяемых системой уравнений?

19 Что называется якобианом?

20 Какие функции называются а) зависимыми, б) независимыми?

21 Дайте определение локального экстремума функции многих переменных.

22 Какие точки называются стационарными и критическими?

23 Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?

24 Какая квадратичная форма называется: а) положительно определенной; б) отрицательно определенной; в) знакоопределенной;

25 г) квазизнакоопределенной; д) знакопеременной? Что называется условным экстремумом функции? Какая функция называется функцией Лагранжа?

Формулировки теорем и формулы

1 Какими свойствами обладают непрерывные функции?

2 В чем суть теоремы Кантора?

3 Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции многих переменных

4 Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

5 Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

6 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y;z)=0$.

7 Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x;y;z)=0$.

8 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

9 Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

10 Как находятся частные производные высших порядков?

11 Какой вид имеет формула Маклорена?

12 Сформулируйте критерий Сильвестра.

13 В чем состоит метод исключения части переменных?

14 В чем состоит метод Лагранжа?

15 Как найти глобальные экстремумы функции?

Доказательства теорем

1 Сформулируйте и докажите теорему о существовании повторных пределов.

2 Сформулируйте и докажите необходимое условие дифференцируемости функции в точке.

3 Сформулируйте и докажите достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

4 Сформулируйте и докажите теорему о равенстве смешанных производных.

5 Сформулируйте и докажите теорему Тейлора для функции $f(x,y)$.

6 Сформулируйте и докажите необходимые условия локального экстремума функции многих переменных.

7 Сформулируйте и докажите достаточные условия экстремума в точке функции двух переменных.

8 Сформулируйте и докажите теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.

9 *Вопросы и задачи на понимание*

10 Может ли внутренняя точка не принадлежать множеству? Может ли точка одновременно быть внутренней и граничной для некоторого множества?

11 Какие функции непрерывны на линейно связных множествах?

12 Является ли ограниченными функции а) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

б) $z = \dfrac{1}{e^{x^2+y^2}}$ в своей области определения? Если да, то найти точную верхнюю и точную нижнюю грань.

13 Является ли равномерной непрерывной функция $z = x^2 + y^2$ при $x > 0$, $y > 0$.

14 В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных?

15 Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции?

16 В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции двух переменных?

Раздел 3 Интегральное исчисление функции многих переменных

Тема 1 Криволинейные интегралы 1-го

1.1 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода

Задача о массе материальной линии. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой AB распределена масса с переменной плотностью $\rho = \rho(x; y)$. Требуется определить массу m дуги AB.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n (рисунок 3.1).

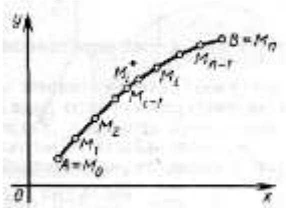

Рисунок 3.1 – Разбиение материальной кривой

Будем считать, что на каждой частичной дуге плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i; \eta_i)$, где $C_i(\xi_i; \eta_i)$ – произвольная точка частичной области. Тогда масса части l_i приблизительно равна $m_i \approx \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i$, а масса всей дуги AB

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i .$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$. Значение m тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением массы всей дуги AB можно считать

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i \ .$$

З а д а ч а   о   п л о щ а д и   ц и л и н д р и ч е с к о й   п о в е р х н о с т и . Пусть в плоскости Oxy задана некоторая гладкая кривая AB, которая является областью определения некоторой функции $z = f(x; y)$, причем $\forall\, M(x; y) \quad f(M) \geq 0$. Тогда точки $(x; y; f(M))$ в совокупности представляют собой некоторую пространственную кривую. Требуется найти площадь цилиндрической поверхности, для которой AB – образующая, направляющие параллельны оси Oz, ограниченной сверху $z = f(x; y)$, снизу кривой AB, с боков прямыми (рисунок 3. 2).

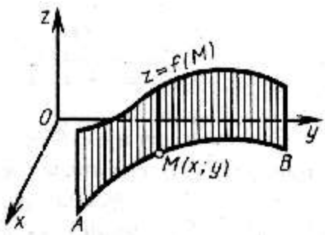

Рисунок 3.2 – Цилиндрическая поверхность

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Из каждой точки разбиения M_0, M_1, ..., M_n проведем перпендикуляры к плоскости Oxy высотой $f(M_i)$, $i = 1,2,..., n$. В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на n полосок. На каждой частичной дуге l_i возьмем точку $C_i(\xi_i; \eta_i)$. Каждую полоску заменим прямоугольником, у которого Δl_i – основание, $f(\xi_i; \eta_i)$ – высота. Тогда площадь каждой полоски приблизительно будет равна $S_i \approx f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i$, а площадь всей цилиндрической поверхности

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i \ .$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$. Значение S тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением площади всей цилиндрической поверхности можно считать

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta l_i .$$

1.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода

Пусть функция $f(x;y)$ определена и ограничена в точках $(x;y)$ гладкой или кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в плоскости Oxy. Разобьем кривую AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$ на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге l_k, $k = 1, 2, ..., n$ точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$ (рисунок 3. 3).

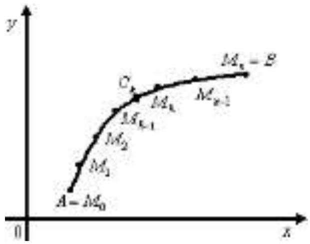

Рисунок 3. 3 – Разбиение кривой AB
для определения криволинейного интеграла 1-го рода

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k) \cdot \Delta l_k$ называется *интегральной суммой* для функции $f(x;y)$, определенной на кривой AB.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$

Криволинейным интегралом первого рода называется предел (если он существует) интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\Delta l_k .$$

Подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой AB, сама кривая AB – *контуром интегрирования*, A и B – *начальной* и *конечной* точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 1-го рода) Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ существует, и его величина не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек на них.

Криволинейный интеграл 1-го рода обладает следующими свойствами:

– $\int\limits_{AB} dl = L$, где L – длина кривой AB;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на кривой AB, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на кривой AB и справедливо равенство:

$$\int\limits_{AB} (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x;y)dl + \beta \int\limits_{AB} g(x;y)dl;$$

– *(аддитивность)* если кривая AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на кривой AB и справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl;$$

– *(оценка интеграла)* если на кривой AB имеет место неравенство $|f(x;y)| \le M$, то

$$\left| \int\limits_{AB} f(x;y)dl \right| \le M \cdot L,$$

где L – длина кривой AB;

– *(монотонность)* если для точек кривой AB выполнено неравенство $f(x;y) \ge g(x;y)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl \ge \int\limits_{AB} g(x;y)dl;$$

– криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления обхода кривой AB:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{BA} f(x;y)dl.$$

1.3 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$.

Тогда дифференциал длины дуги равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на $[\alpha;\beta]$. Тогда дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$ и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, и $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Дифференциал дуги имеет вид $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$ и справедливо равенство

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{a}^{b} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции 3-х переменных по пространственной кривой AB:

$$\int_{AB} f(x;y;z)dl .$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, справедлива формула:

$$\int_{AB} f(x;y;z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt .$$

1.4 Приложения криволинейного интеграла 1-го рода

Криволинейный интеграл 1-го рода используется для вычисления:

– *длины кривой*: $L = \int_{AB} dl$;

– *площади цилиндрической поверхности,* направляющей которой служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, и образующая параллельна оси Oz

$$S = \int_{AB} f(x;y)dl ;$$

– *массы материальной кривой* AB с плотностью $\rho(x;y)$:

$$m = \int_{AB} \rho(x;y)dl ;$$

– *статических моментов* и *координат центра тяжести* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy:

$$M_x = \int_{AB} y\rho(x;y)dl , \qquad M_y = \int_{AB} x\rho(x;y)dl ,$$

$$x_0 = \frac{M_y}{m} , \qquad y_0 = \frac{M_x}{m}$$

– *моментов инерции* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy, а также начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2 \rho(x;y)dl\,,\; I_y = \int\limits_{AB} x^2 \rho(x;y)dl\,, I_0 = I_x + I_y\,.$$

Теорема 3 (непрерывность сложной функции) Пусть функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, $t=(t_1,t_2,...,t_m)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0 = \left(t_1^0;t_2^0;...;t_m^0\right) \in \mathbb{R}^m$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0 = \left(x_1(t_0);x_2(t_0);...;x_n(t_0)\right) \in \mathbb{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t) = f\left(x_1(t);x_2(t);...;x_n(t)\right)$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

Тема 4 Частные производные

4.1 Частные и полные приращения функции многих переменных
4.2 Частные производные
4.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных
4.4 Дифференцируемость функции многих переменных

4.1 Частные и полные приращения функции многих переменных

Пусть функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ определена в окрестности точки $x_0 = \left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$. Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0 оставим без изменения.

Частным приращением функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = \left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = f\left(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0;...;x_n^0\right) - f\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2} f(x_0)$, $\Delta_{x_3} f(x_0)$, ..., $\Delta_{x_n} f(x_0)$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Полным приращением в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Геометрически для функции $f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$ частные и полное приращения

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рисунок 2. 1).

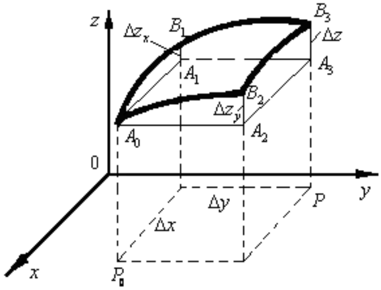

Рисунок 2. 1 – Геометрический смысл частных и полного приращений функции $f(x, y)$

4.2 Частные производные

Частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1} f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Для записи частной производной функции $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ используется также обозначение $f'_{x_1}\Big|_{x=x_0}$.

Аналогично определяются частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$, ... , $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ... , x_n в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

4.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных

<u>Геометрический смысл частных производных.</u> Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, графиком которой является поверхность Ω. Точке $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$ на поверхности Ω соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y = y_0$. В сечении получается кривая $z = f(x; y_0)$ (на рисунке 2. 2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x; y_0)$ в плоскости $y = y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ (рисунок 2. 2).

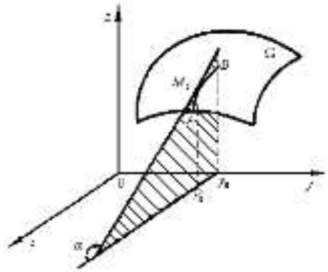

Рисунок 2. 2 – Геометрический смысл $\dfrac{\partial z(x;y)}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0;y_0)$

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z = f(x,y)$ по y.

<u>Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</u> Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x,y)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ является некоторая поверхность Ω (рисунок 2. 3). Выберем на ней точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

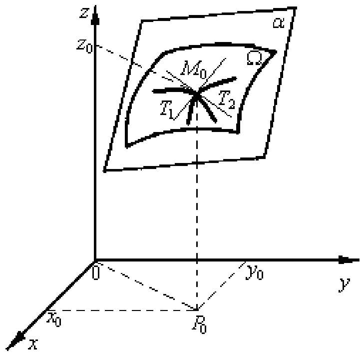

Рисунок 2. 3 – Касательная плоскость α к поверхности Ω

Касательной плоскостью к поверхности Ω в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости α к поверхности, проходящей через касательные T_1 и T_2 имеет вид

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

или

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

Нормалью к поверхности Ω в данной точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде:

$$\frac{(x-x_0)}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{(y-y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{(z-z_0)}{-1}.$$

Точка, в которой $F'_x=F'_y=F'_z=0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется *особой точкой поверхности*. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в данной точке $P_0(x_0;y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y=y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0,y_0)$ – в направлении прямой $x=x_0$ (относительно переменной y).

4.4 Дифференцируемость функции многих переменных

Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности $U(\delta;P_0)$ точки $P_0(x_0;y_0)$. Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P_0(x_0;y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

Данное равенство называется *условием дифференцируемости* функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. Здесь A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Условие дифференцируемости записывается также в виде:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0; y_0)$ и $P(x; y)$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

Функция $f(x, y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется *дифференцируемой на* G.

Слагаемое $A\Delta x + B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется *главной частью приращения функции*.

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности) Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$, причем $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны: из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x; y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми*.

Тема 5 Дифференцирование сложной функции

3.1 Полный дифференциал функции многих переменных
3.2 Геометрический смысл полного дифференциала

3.3 Дифференцирование сложной функции

3.4 Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных

3.1 Полный дифференциал функции многих переменных

Если функция $f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f\big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции и называется *полным дифференциалом* функции:

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются *дифференциалами независимых переменных* x и y и обозначаются соответственно dx и dy .

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$ называются *частными дифференциалами* функции $f(x;y)$ и обозначаются $d_x f$ и $d_y f$.

Таким образом, $df = d_x f + d_y f$.

Для приближенных вычислений функции $f(x,y)$ в точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ при малых Δx и Δy используется формула

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

3.2 Геометрический смысл полного дифференциала

Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$, а левая его часть $z-z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z-z_0=df(x_0,y_0)$.

Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+...+(\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет вид

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

3.3 Дифференцирование сложной функции

Пусть $f(x,y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u и v:

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v).$$

Тогда функция $f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ является *сложной* функцией двух независимых переменных u и v. Переменные x и y называются *промежуточными переменными*.

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y), а функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u,v), то сложная функция $f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ дифференцируема в точке (u,v) и ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Для функции $f(x,y,z)$ трех переменных, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u, v, w:

$$x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$$

частные производные сложной функции $f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Аналогично для функции n переменных, $n > 3$.

Для функции $f(x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ функции независимой переменной t, сложная функция $f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ является функцией одной переменной t. Производная

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

сложной функции $f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ называется *полной производной*.

3.4 Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных

Найдем полный дифференциал сложной функции $f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$. Подставим выражения $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, определяемые равенствами

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

в формулу полного дифференциала сложной функции двух переменных $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Получим

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

или

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \right).$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv$, то

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv .$$

Видно, что форма записи полного дифференциала функции двух переменных не зависит от того, являются ли u и v независимыми переменными, или функциями других независимых переменных. Аналогичное утверждение имеет место и для функции $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. В этом и заключается *инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных*.

Темы 6 Частные производные, дифференциалы высших порядков

6.1 Частные производные высших порядков

6.2 Теорема о равенстве смешанных производных

6.3 Дифференциалы высших порядков функции двух переменных

6.1 Частные производные высших порядков

Пусть функция $f\left(x, y\right)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точке $(x; y) \in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются *частными производными первого порядка*. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f\left(x, y\right)$ в точке $\left(x; y\right)$ и обозначаются:

$f''_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$f''_{xy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$f''_{yx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$f''_{yy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Если производные второго порядка являются непрерывными функциями, то их можно дифференцировать по переменным x и y. Получим частные производные третьего порядка и т. д. Частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется *частной производной n-го порядка* и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, … называются *смешанными производными*.

6.2 Теорема о равенстве смешанных производных

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Теорема 1 имеет место и для функции любого числа переменных.

Пусть $f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Выражение вида:

$$df = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy,$$

называется *дифференциалом первого порядка* функции $f(x,y)$.

6.3 Дифференциалы высших порядков функции двух переменных

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $(x;y)\in D(f)$, если он существует, называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается:

$$d^2 f = d(df).$$

Аналитическое выражение для $d^2 z$ имеет вид:

$$d^2 f = f''_{xx}(x,y)\,dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)\,dxdy + f''_{yy}(x,y)\,dy^2.$$

Аналогично для *дифференциала третьего порядка* $d^3 f$:

$$d^3 f = d\left(d^2 f\right) =$$

$$= f'''_{xxx}(x,y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2 + 3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Функция f называется k *раз непрерывно дифференцируемой* в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Аналитическое выражение для дифференциала n-го порядка кратко записывается в виде символической формулы:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

Если $f(x,y)$ дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Темы 7 Формула Тейлора для функции многих переменных

7.1 Формула Тейлора для функции двух переменных
7.2 Формула Маклорена для функции двух переменных

7.1 Формула Тейлора для функции двух переменных

Теорема 2 (Тейлора) Пусть функция двух переменных $f\left(x,y\right)$ *непрерывна со всеми частными производными до* $\left(n+1\right)$ *порядка включительно в некоторой* δ*-окрестности точки* $\left(x_0;y_0\right)\in D\left(f\right)$. *Тогда справедлива формула Тейлора::*

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+df\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{2!}d^2f\left(x_0,y_0\right)+...+\frac{1}{n!}d^nf\left(x_0,y_0\right)+R_n,$$

$$где\ R_n=\frac{1}{\left(n+1\right)!}d^{n+1}f\left(\xi,\eta\right),\ x_0<\xi<x;\ y_0<\eta<y.$$

Следствие. При условиях теоремы 2 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+df\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{2!}d^2f\left(x_0,y_0\right)+...+\frac{1}{n!}d^nf\left(x_0,y_0\right)+o\left(\rho^n\right),$$

где $\rho=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$.

7.2 Формула Маклорена для функции двух переменных

Если в формуле Тейлора положить $x_0=y_0=0$, то имеет место *формула Маклорена*:

$$f\left(x,y\right)=f\left(0,0\right)+df\left(0,0\right)+\frac{1}{2!}d^2f\left(0,0\right)+...+\frac{1}{n!}d^nf\left(0,0\right)+R_n.$$

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

Тема 8 Экстремум функции многих переменных

8.1 Понятие экстремума функции многих переменных
8.2 Необходимое условие локального экстремума
8.3 Некоторые сведения о квадратичных формах

8.4 Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных

8.1 Понятие экстремума функции многих переменных

Пусть дана функция $f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $f(P)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P) \qquad (f(P_0) < f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют *локальным максимумом (минимумом)* функции и обозначается:

$$\max_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0) \qquad (\min_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума* функции, а максимумы и минимумы функции – *экстремумами функции*.

Очевидно, что если функция $f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то в случае локального максимума

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) < 0 \ \ \forall \ \ P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0),$$

а в случае локального минимума –

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) > 0 \ \ \forall \ \ P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0).$$

8.2 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума) Если в точке P_0 дифференцируемая функция $f(P)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n} = 0,$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Следствие. Если функция $f(P)$ имеет в точке P_0 локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке $du(P_0)$ равен нулю или не существует.

Точки, в которых выполняется необходимое условие, называются *стационарными.* Точки, в которых дифференциал функции равен нулю или не существует, называются *точками возможного экстремума* или *критическими*.

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в точке $P_0\left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$.

8.3 Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция вида

$$Q(x_1; x_2; \ldots; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

называется *квадратичной формой* от переменных x_1, x_2, ..., x_n, числа a_{ij}, $i, j = 1,2,\ldots,n$, называются *коэффициентами квадратичной формы*, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы*.

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется *симметричной*.

Главными минорами матрицы A называются определители:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется:

– *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных x_1, x_2, ..., x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения;

– *знакоопределенной*, если она является положительно определенной или отрицательно определенной;

– *квазизнакоопределенной*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$;

– *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 2 (критерий Сильвестра) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ldots.$$

Для функции $f(x_1; x_2; ...; x_n)$ второй дифференциал представляет собой квадратичную форму

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} dx_k dx_m$$

от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n.

8.4 Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума) Пусть функция $f(x_1;x_2;...;x_n)=f(P)$ *дифференцируема в некоторой окрестности точки* $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ *и дважды дифференцируема в самой точке* P_0*, причем* P_0 *– стационарная точка. Тогда*

1) если второй дифференциал $d^2f\big|_{P_0}$ *является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных* dx_1, dx_2, …, dx_n*, то функция* $f(P)$ *имеет в точке* P_0 *локальный минимум (максимум);*

2) если $d^2f\big|_{P_0}$ *является знакопеременной квадратичной формой, то функция* $f(P)$ *в точке* P_0 *экстремума не имеет.*

В случае $df\big|_{P_0}=0$, а $d^2f\big|_{P_0}$ является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция $f(P)$ может иметь в точке P_0 локальный экстремум, а может и не иметь.

В частности, для функции двух переменных $f(x;y)$ имеем теорему 4.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных) Пусть $P_0(x_0;y_0)$ *стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности* $U(\delta;P_0)$ *функции* $f(x;y)$*. И пусть*

$$\Delta(P_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Тогда точка $P_0(x_0;y_0)$ *является:*

1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$*;*

2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и*

$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$;

3) если $\Delta(P_0) < 0$, *то в стационарной точке* P_0 *локального экстремума нет,*

4) $\Delta(P_0) = 0$, *то локальный экстремум в стационарной точке* P_0 *может быть, а может и не быть.*

В случае $\Delta(P_0) = 0$ необходимо провести дополнительные исследования знака функции $f(x, y)$ в $U(\delta; P_0)$.

Тема 9 Дифференцирование неявной функции

9.1 Неявные функции, задаваемые одним уравнением
9.2 Неявные функции, задаваемые системой уравнений
9.3 Якобиан системы функций
9.4 Зависимость функций

9.1 Неявные функции, задаваемые одним уравнением

Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$.

Теорема 1 Пусть функция $F(x, y, z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\exists\ (x_0; y_0; z_0) : F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

2) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$;

3) $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ *и* $F'_z(x, y, z)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $(x_0; y_0; z_0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) *существует единственная непрерывная функция* $z = f(x, y)$, *удовлетворяющая уравнению* $F(x, y, z) = 0$ *и такая, что* $f(x_0, y_0) = z_0$.

Если функция $F(x, y, z)$ в условиях теоремы 1 дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то функция $z = f(x, y)$ также дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

Если уравнение поверхности Ω задано неявной функцией $F(x,y,z)=0$, то уравнение *касательной* плоскости α к поверхности имеет вид

$$F'_x\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0$$

и каноническое уравнение *нормали*:

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

9.2 Неявные функции, задаваемые системой уравнений

Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ F_2(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_m(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0. \end{cases}$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, ..., y_m есть

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;...;x_n), \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;...;x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_m = f_m(x_1;x_2;...;x_n), \end{cases}$$

и называется *совокупностью неявных функций*.

9.3 Якобиан системы функций

Определитель

$$J=\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

составленный из частных производных, называется *якобианом (определителем Якоби)* функций F_1, F_2, ..., F_m по переменным

y_1, y_2, ..., y_m.

Теорема 2 Пусть

1) функции F_1, F_2, ..., F_m дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_1^0;y_2^0;...;y_m^0\right)$,

2) частные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i, j=1,2,...,m$ непрерывны в P_0,

3) $F_1(P_0)=0$, $F_2(P_0)=0$, ..., $F_m(P_0)=0$, $\left.\dfrac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}\right|_{P_0}\neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки система уравнений $F_j\left(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m\right)=0$, $j=1,2,...,m$, определяет единственную совокупность дифференцируемых неявных функций вида $y_j=f_j\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$, $j=1,2,...,m$.

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$, ..., $\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,n$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}+...+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}=0,\\ \text{.......... ....,}\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}+...+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}=0,\end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 2, якобиан отличен от нуля).

9.4 Зависимость функций

Пусть функции $y_j=f_j\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$, $j=1,2,...,m$ определены и дифференцируемы в некоторой области $G\subset\mathbb{R}^n$, $m\le n$. Функция $y_k=f_k\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$ называется *зависимой* в области G от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k=\Phi(y_1;y_2;...y_{k-1};y_{k+1};...;y_m),$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Если ни одна из функций $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, не зависит от остальных, то система из этих функций называется *независимой* в G.

Теорема 3 (достаточное условие независимости) Пусть

1) функции $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$;

2) якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в этой точке.

Тогда функции $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, независимы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Следствие Если функции $y_j = f_j\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, зависимы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, то все якобианы $\dfrac{D\left(y_1; y_2; ...; y_m\right)}{D\left(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n}\right)}$ равны нулю в этой окрестности.

Тема 10 Условный экстремум

10.1 Понятие условного экстремума
10.2 Методы отыскания условного экстремума
10.3 Метод множителей Лагранжа
10.4 Глобальный экстремум функции многих переменных

10.1 Понятие условного экстремума

Рассмотрим функцию $f\left(P\right)$, $P\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$. Будем считать, что ее аргументы являются связанными между собой

$$\begin{cases} F_1\left(x_1; x_2; ...x_n\right) = 0, \\ F_2\left(x_1; x_2; ...x_n\right) = 0, \\ ...., \\ F_k\left(x_1; x_2; ...x_n\right) = 0. \end{cases}$$

Данные соотношения называются *условиями связи.* Пусть координаты точки $P_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $f(P)$ имеет в точке $P_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ *условный минимум (максимум)* при условиях связи, если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in U(\delta; P_0)$, $P \neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (6.1), выполняется неравенство

$$f(P) > f(P_0) \qquad (f(P) < f(P_0)).$$

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

10.2 Методы отыскания условного экстремума

Рассмотрим методы нахождения условного экстремума функции $f(x, y)$, переменные x и y которой удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

Пусть требуется найти локальный экстремум функции $f(x, y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т. е. выразить y как функцию x: $y = y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $f(x, y)$ вместо y функцию $y(x)$, получается функция одной переменной $f(x, y(x))$. Для этой функции проводится исследование на локальный экстремум известными методами. Найденные экстремумы являются точками условного экстремума для функции $f(x, y)$. Аналогично поступают, если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т. е. x выразить как функцию y.

Если условие связи задается параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $f(x, y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

Если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных или представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

10.3 Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $f(x, y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x, y)=0$ относительно переменной x или y.

Введем вспомогательную функцию, называемую *функцией Лагранжа*:

$$L(x, y, \lambda)= f(x, y)+\lambda\varphi(x, y),$$

где λ – некоторое действительное число, которое называется *множителем Лагранжа*.

Теорема 1 (Лагранжа) Пусть 1) функция $f(x, y)$ определена и дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $\varphi(x, y)=0$; 2) уравнение $\varphi(x, y)=0$ удовлетворяет в δ-окрестности точки P_0 условиям теоремы 2 практического занятия 3.

Тогда существует такое число λ, что выполняются условия Лагранжа:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0.$$

Согласно этой теореме для нахождения условного экстремума функции $f(x, y)$ с уравнением связи $\varphi(x, y)=0$ необходимо:

– составить функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda)$,

– найти точки $(x_k; y_k; \lambda_k)$ возможного экстремума функции Лагранжа;

– при фиксированном λ_k для дифференциала $d^2L(x_k; y_k; \lambda_k)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}d^2x+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}d^2y$ проверить условие $d^2L(x_k; y_k; \lambda_k)>0$. Если оно выполняется, то точка $(x_k; y_k; \lambda_k)$ является точкой условного экстремума функции $f(x, y)$.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $f\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$.

10.4 Глобальный экстремум функции многих переменных

Пусть функция $f\left(x,y\right)$ определена на компакте D. Тогда на нем она достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо внутри D, либо на границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения на компакте называются *точками глобального экстремума*. Если точка глобального экстремума функции является внутренней точкой области, то она является точкой локального экстремума, а если граничной, то – точкой условного экстремума. Следовательно, чтобы найти глобальные экстремумы функции $f\left(x;y\right)$ на компакте D, необходимо найти локальные и условные экстремумы функции, сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Вопросы для самоконтроля

Определения

26 Дайте определения: а) n-мерного арифметического точечного пространства; б) расстояния в пространстве $\mathbb{R}^n$, в) n-мерного евклидова пространства.

27 Дайте определения окрестности и проколотой окрестности точки в пространстве $\mathbb{R}^n$.

28 Какая точка множества называется: а) внутренней; б) граничной; в) предельной; г) изолированной?

29 Какое множество называется а) открытым; б) замкнутым; в) компактом; г) связным; д) областью?

30 Что называется функцией в пространстве $\mathbb{R}^n$?

31 Что называется множеством уровня?

32 Сформулируйте определения предела функции $f\left(x,y\right)$ в точке по Гейне и по Коши.

33 Дайте для функции многих переменных определения бесконечных пределов:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

34 Сформулируйте определение повторного предела функции двух переменных.

35 Какая функция называется непрерывной в точке? Сформулируйте определение непрерывности функции на компактах.

36 Сформулируйте определение равномерной непрерывности функции.

37 Какое число называется колебанием функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$?

38 Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных?

39 Дайте определение частных производных.

40 Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.

41 Что называется полным дифференциалом функции многих переменных?

42 Какая функция называется неявной?

43 Что называется совокупностью неявных функций, определяемых системой уравнений?

44 Что называется якобианом?

45 Какие функции называются а) зависимыми, б) независимыми?

46 Дайте определение локального экстремума функции многих переменных.

47 Какие точки называются стационарными и критическими?

48 Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?

49 Какая квадратичная форма называется: а) положительно определенной; б) отрицательно определенной; в) знакоопределенной;

50 г) квазизнакоопределенной; д) знакопеременной? Что называется условным экстремумом функции? Какая функция называется функцией Лагранжа?

Формулировки теорем и формулы

16 Какими свойствами обладают непрерывные функции?

17 В чем суть теоремы Кантора?

18 Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции многих переменных

19 Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

20 Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

21 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y;z)=0$.

22 Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x;y;z)=0$.

23 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

24 Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

25 Как находятся частные производные высших порядков?

26 Какой вид имеет формула Маклорена?

27 Сформулируйте критерий Сильвестра.

28 В чем состоит метод исключения части переменных?

29 В чем состоит метод Лагранжа?

30 Как найти глобальные экстремумы функции?

Доказательства теорем

17 Сформулируйте и докажите теорему о существовании повторных пределов.

18 Сформулируйте и докажите необходимое условие дифференцируемости функции в точке.

19 Сформулируйте и докажите достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

20 Сформулируйте и докажите теорему о равенстве смешанных производных.

21 Сформулируйте и докажите теорему Тейлора для функции $f(x,y)$.

22 Сформулируйте и докажите необходимые условия локального экстремума функции многих переменных.

23 Сформулируйте и докажите достаточные условия экстремума в точке функции двух переменных.

24 Сформулируйте и докажите теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.

25 Вопросы и задачи на понимание

26 Может ли внутренняя точка не принадлежать множеству? Может ли точка одновременно быть внутренней и граничной для некоторого множества?

27 Какие функции непрерывны на линейно связных множествах?

28 Является ли ограниченными функции а) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$; б) $z = \frac{1}{e^{x^2+y^2}}$ в своей области определения? Если да, то найти точную верхнюю и точную нижнюю грань.

29 Является ли равномерной непрерывной функция $z = x^2 + y^2$ при $x > 0$, $y > 0$.

30 В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных?

31 Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции?

32 В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции двух переменных?

Раздел 3 **Интегральное исчисление функции многих переменных**

Тема 1 Криволинейные интегралы 1-го

1.1 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода

1.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1.3 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

1.4 Приложения криволинейного интеграла 1-го рода

1.1 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода

Задача о массе материальной линии. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой AB распределена масса с переменной плотностью $\rho = \rho(x;y)$. Требуется определить массу m дуги AB.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n (рисунок 3.1).

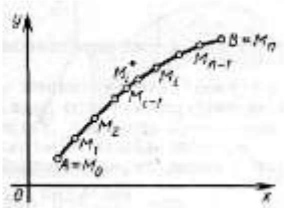

Рисунок 3.1 – Разбиение материальной кривой

Будем считать, что на каждой частичной дуге плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i;\eta_i)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка частичной области. Тогда масса части l_i приблизительно равна $m_i \approx \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i$, а масса всей дуги AB

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i .$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Значение m тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением массы всей дуги AB можно считать

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i ; \eta_i) \cdot \Delta l_i \ .$$

Задача о площади цилиндрической поверхности. Пусть в плоскости Oxy задана некоторая гладкая кривая AB, которая является областью определения некоторой функции $z = f(x; y)$, причем $\forall\ M(x; y)$ $f(M) \geq 0$. Тогда точки $(x; y; f(M))$ в совокупности представляют собой некоторую пространственную кривую. Требуется найти площадь цилиндрической поверхности, для которой AB – образующая, направляющие параллельны оси Oz, ограниченной сверху $z = f(x; y)$, снизу кривой AB, с боков прямыми (рисунок 3. 2).

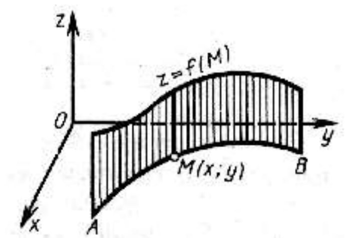

Рисунок 3.2 – Цилиндрическая поверхность

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Из каждой точки разбиения M_0, M_1, ..., M_n проведем перпендикуляры к плоскости Oxy высотой $f(M_i)$, $i = 1,2,..., n$. В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на n полосок. На каждой частичной дуге l_i возьмем точку $C_i(\xi_i ; \eta_i)$. Каждую полоску заменим прямоугольником, у которого Δl_i – основание, $f(\xi_i ; \eta_i)$ – высота. Тогда площадь каждой полоски приблизительно будет равна $S_i \approx f(\xi_i ; \eta_i) \cdot \Delta l_i$, а площадь всей цилиндрической поверхности

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i ; \eta_i) \cdot \Delta l_i \ .$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$. Значение S тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением площади всей цилиндрической поверхности можно считать

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i .$$

1.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода

Пусть функция $f(x; y)$ определена и ограничена в точках $(x; y)$ гладкой или кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в плоскости Oxy. Разобьем кривую AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$ на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге l_k, $k = 1, 2, ..., n$ точку $C_k(\xi_k; \eta_k)$ (рисунок 3. 3).

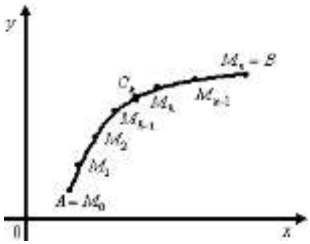

Рисунок 3. 3 – Разбиение кривой AB
для определения криволинейного интеграла 1-го рода

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k) \cdot \Delta l_k$ называется *интегральной суммой* для функции $f(x; y)$, определенной на кривой AB.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$

Криволинейным интегралом первого рода называется предел (если он существует) интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x; y) dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k) \Delta l_k .$$

Подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой AB, сама кривая AB – *контуром интегрирования,* A и B – *начальной* и *конечной* точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 1-го рода) Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ существует, и его величина не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек на них.

Криволинейный интеграл 1-го рода обладает следующими свойствами:

– $\int\limits_{AB} dl = L$, где L – длина кривой AB;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на кривой AB, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на кривой AB и справедливо равенство:

$$\int\limits_{AB} (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x;y)dl + \beta \int\limits_{AB} g(x;y)dl ;$$

– *(аддитивность)* если кривая AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на кривой AB и справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl ;$$

– *(оценка интеграла)* если на кривой AB имеет место неравенство $|f(x;y)| \le M$, то

$$\left| \int\limits_{AB} f(x;y)dl \right| \le M \cdot L ,$$

где L – длина кривой AB;

– *(монотонность)* если для точек кривой AB выполнено неравенство $f(x;y) \ge g(x;y)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl \ge \int\limits_{AB} g(x;y)dl ;$$

– криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления обхода кривой AB:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{BA} f(x;y)dl .$$

1.3 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$.

Тогда дифференциал длины дуги равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt .$$

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi),\ \ \alpha \le \varphi \le \beta$, и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на $[\alpha;\beta]$. Тогда дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$ и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi .$$

Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, и $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Дифференциал дуги имеет вид $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$ и справедливо равенство

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{a}^{b} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx .$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции 3-х переменных по пространственной кривой AB:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl .$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt .$$

1.4 Приложения криволинейного интеграла 1-го рода

Криволинейный интеграл 1-го рода используется для вычисления:

– *длины кривой*: $L = \int\limits_{AB} dl$;

– *площади цилиндрической поверхности,* направляющей которой служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, и образующая параллельна оси Oz

$$S = \int\limits_{AB} f(x;y)dl ;$$

– *массы материальной кривой* AB с плотностью $\rho(x;y)$:

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x;y)dl ;$$

– *статических моментов* и *координат центра тяжести* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy:

$$M_x = \int\limits_{AB} y\rho(x;y)dl , \qquad M_y = \int\limits_{AB} x\rho(x;y)dl ,$$

$$x_0 = \frac{M_y}{m} , \qquad y_0 = \frac{M_x}{m}$$

– *моментов инерции* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy, а также начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$I_x = \int_{AB} y^2 \rho(x;y)dl\,,\ I_y = \int_{AB} x^2 \rho(x;y)dl\,, I_0 = I_x + I_y\,.$$

Тема 2 Криволинейные интегралы 2-го рода

2.1 Задача о работе переменной силы
2.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода
2.3 Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода
2.4 Приложения криволинейного интеграла 2-го рода

2.1 Задача о работе переменой силы

Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}$ перемещается в плоскости Oxy вдоль некоторой кривой AB от точки A до точки B. Требуется найти работу силы $\vec{F}$.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n (рисунок 3. 4).

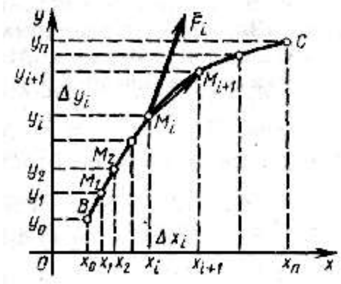

Рисунок 3.4 – Действие переменной силы $\vec{F}$ вдоль кривой AB

В виду малости дуги l_i, будем считать:

1) вектор силы перемещения $\vec{F}$ сохраняет на дуге $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ постоянное значение $\vec{F_i} = \vec{F}\left(P(\xi_i;\eta_i);Q(\xi_i;\eta_i)\right)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка дуги l_i, $P(\xi_i;\eta_i)$ и $Q(\xi_i;\eta_i)$ – проекции вектора $\vec{F_i}$ на оси Ox и Oy;

2) дуга $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ может быть заменена вектором $\overline{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i; \Delta y_i)$, где Δx_i Δy_i – проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси, $i = 1,2,..., n$.

Тогда работа A силы $\vec{F}$ на элементе дуги $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ приблизительно равна скалярному произведению векторов $\vec{F_i}$ и $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$, т. е. $A_i \approx \vec{F_i} \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ или в координатной форме

$$A_i \approx P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i .$$

Работа A силы $\vec{F}$ вдоль всей дуги AB

$$A_n = \sum_{i-1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i .$$

Обозначим наибольшую из длин Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n как $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$. Значение A_n тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением работы A силы $\vec{F}$ всей дуги AB можно считать

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i .$$

2.2 Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены в каждой точке кривой AB. Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге $l_k = \overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$, $k = 1,2,...,n$, точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$. Проекциями дуги $l_k = \overset{\cup}{M_{k-1}M_k}$ на оси Ox и Oy являются Δx_k и Δy_k (рисунок 3. 5).

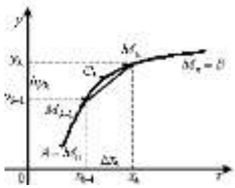

Рисунок 3. 5 – Разбиение кривой AB
для определения криволинейного интеграла 2-го рода

Сумма $\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta x_k$ называется *интегральной суммой по переменной* x для функции $P(x;y)$; сумма $\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta y_k$ называется *интегральной суммой по переменной* y для функции $Q(x;y)$.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta l_k$.

Криволинейным интегралом по координате x *по кривой* AB от функции $P(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta x_k$ при $\lambda\to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k .$$

Криволинейным интегралом по координате y *по кривой* AB от функции $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta y_k$ при $\lambda\to 0$:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k .$$

Криволинейным интегралом 2-го рода по кривой AB от функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) при $\lambda\to 0$ интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k ,$$

и обозначается

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k \,.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода можно записать в виде

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)dy\,.$$

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 2-го рода) Если кривая AB гладкая, а функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB, то криволинейный интеграл 2-го рода существует.

Пусть AB – *замкнутая кривая*, т. е. точка A совпадает с точкой B. Тогда для нее можно определить два направления обхода от точки A к точке B. Направление обхода замкнутой кривой называется *положительным*, если область, лежащая внутри этого контура остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление называется *отрицательным*.

Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается как $\oint\limits_{\Gamma} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$.

Криволинейный интеграл 2-го рода обладает следующими свойствами:

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y)$ и $P_2(x;y)$ интегрируемы на кривой AB по переменной x, то функция $\alpha\cdot P_1(x;y)+\beta\cdot P_2(x;y)$ также интегрируема на дуге AB по переменной x и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} (\alpha P_1(x;y)+\beta P_2(x;y))dx = \alpha\int\limits_{AB} P_1(x;y)dx + \beta\int\limits_{AB} P_2(x;y)dx\,.$$

Аналогично по переменной y;

– *(аддитивность)* если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC\cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ интегрируемы, то функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ также интегрируемы на дуге AB и справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy\,;$$

– *(ориентированность)* при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода изменяет свой знак на противоположный:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int\limits_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy \,;$$

– если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_{AB} P(x;y)dx = 0$; если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy, то $\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = 0$;

– интеграл по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

2.3 Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) \right] dt \,.$$

Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, где функции $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P\big(x; y(x)\big) + Q\big(x; y(x)\big) y'(x) \right] dx \,.$$

Теорема 2 (связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода) Пусть

1) кусочно-гладкая кривая AB, лежит в плоскости Oxy и задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, причем $A(x(\alpha); y(\alpha))$, $B(x(\beta); y(\beta))$;

2) функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ кусочно-непрерывны вдоль кривой AB;

3) вектор $\vec{\tau}=(\cos\alpha;\cos\beta)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y)$, где α и β углы, составляемые с осями координат (рисунок 3.6).

Тогда имеет место равенство:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AB}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta\right)dl\ .$$

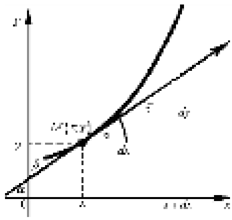

Рисунок 3.6 – Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода

Для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\neq 0$, $A(x(\alpha);y(\alpha);z(\alpha))$, $B(x(\beta);y(\beta);z(\beta))$, криволинейный интеграл 2-го рода вводится аналогично плоскому случаю:

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz\ .$$

При этом формула, выражающая связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода имеет вид:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{AB}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dl\ ,$$

где $\vec{\tau}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y;z)$, α, β, γ углы, составляемые $\vec{\tau}$ с положительными направлениями осей координат, причем направление вектора $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от точки A к точке B.

2.4 Приложения криволинейного интеграла 2-го рода

Криволинейный интеграл 2-го рода используется для вычисления:

– *работы силы* $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой AB от точки A до точки B:

$$A=\int_{AB} P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz,$$

где $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно;

– *площади плоской фигуры*, ограниченной замкнутым контуром Γ:

$$S=\oint_{\Gamma} xdy, \qquad S=-\oint_{\Gamma} ydx, \qquad S=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma} xdy-ydx.$$

Тема 3 Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^n$

3.1 Клетки и клеточные множества в $\mathbb{R}$n

Клетками в $\mathbb{R}$ называются промежутки, точки и пустое множество Ø. Если клетка I есть *промежуток*, то ее *мера* есть число $m(I)$, равное длине промежутка I. Если клетка I есть *точка* или *пустое множество*, то $m(I)=0$.

Пусть I_1, I_2, ..., I_n — клетки в $\mathbb{R}$.

Множество точек $\Pi=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$ называется *клеткой* в $\mathbb{R}^n$. *Мерой* $m(\Pi)$ клетки Π называется произведение мер клеток I_k :

$$m(\Pi)=m(I_1)\cdot m(I_2)\cdot\ldots\cdot m(I_n)=\prod_{k=1}^{n} m(I_k).$$

Здесь «$\times$» обозначает декартово произведение множеств.

Ниже приведены свойства клеток.

– если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n – пустое множество то и клетка $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ есть пустое множество (пустая клетка) и $m(\Pi) = 0$. Если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n есть точка в $\mathbb{R}$, то $m(\Pi) = 0$. Если все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются точками в $\mathbb{R}$, то и Π есть точка в $\mathbb{R}^n$ и $m(\Pi) = 0$. Если $m(\Pi) > 0$, то все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются промежутками в $\mathbb{R}$ и $m(I_k) > 0$, $k = 1,2,\ldots,n$;

– отрезки, точки и пустое множество являются замкнутыми множествами в $\mathbb{R}$ (замкнутыми клетками). Замыкание любой клетки в $\mathbb{R}$ есть замкнутая клетка;

– интервалы и пустое множество являются открытыми множествами в $\mathbb{R}$ (открытыми клетками). Внутренность любой клетки в $\mathbb{R}$ есть открытая клетка;

– пересечение двух клеток в $\mathbb{R}$ есть клетка. Разность двух клеток в $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем двух непересекающихся клеток;

– для любой клетки $I \subset \mathbb{R}$ справедливы равенства $m(I) = m(I^\circ) = m(\bar{I})$, где I° – внутренность клетки I, а $\bar{I}$ – замыкание клетки I в $\mathbb{R}$;

– для любой клетки $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ справедливы соотношения:

$$\Pi^\circ = I_1^\circ \times I_2^\circ \times \ldots \times I_n^\circ, \ \overline{\Pi} = \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 \times \ldots \times \bar{I}_n, \ m(\Pi) = m(\Pi^\circ) = m(\overline{\Pi});$$

– если Π и Θ клетки в $\mathbb{R}^n$ и $\Pi \subset \Theta$, то $m(\Pi) < m(\Theta)$;

– если I_1, J_1, I_2, J_2, ..., I_n, J_n клетки в $\mathbb{R}$, $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ и $\Theta = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$, то $\Pi \cap \Theta$ есть клетка в $\mathbb{R}^n$, причем

$$\Pi \cap \Theta = \left\{ (x_1; x_2; \ldots; x_n) \,\middle|\, x_1 \in I_1 \cap J_1, \ldots, x_n \in I_n \cap J_n \right\};$$

– если клетка I есть промежуток в $\mathbb{R}$ с концами a и b, то граница клетки $\partial I = \{ a; b \}$. Если клетка $I \subset \mathbb{R}$ есть точка или пустое множество, то $\partial I = I$;

– пусть совокупность клеток $\{ I_1; I_2; \ldots; I_t \}$ есть разбиение клетки $I \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$m(I) = m(I_1) + m(I_2) + m(I_t);$$

– пусть совокупность клеток $\{ I_1; I_2; ...; I_t \}$ есть разбиение клетки $I \subset \mathbb{R}$, а совокупность клеток $\{ J_1; J_2; ...; J_p \}$ есть разбиение клетки $J \subset \mathbb{R}$. Тогда совокупность клеток $\{ \Pi_{ij} = I_i \times J_j \}$, $i = 1,2,..., t$, $j = 1,2,..., p$, есть разбиение клетки $\Pi = I \times J$, причем $m(\Pi) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{p} m(\Pi_{ij})$. Такое разбиение клетки называется *стандартным*;

– если совокупность клеток $\{ \Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_p \}$ есть разбиение клетки $\Pi \subset \mathbb{R}^2$, то $m(\Pi) = \sum_{i=1}^{p} m(\Pi_i)$.

Аналогично строится стандартное разбиение клетки в $\mathbb{R}^n$.

Разбиение клетки Π в пространстве $\mathbb{R}^2$ изображено на рисунке 3. 7.

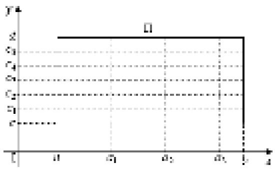

Рисунок 3. 7 – Разбиение клетки Π в пространстве $\mathbb{R}^2$

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *клеточным*, если это множество можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся клеток $\{ \Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_s \}$. *Мерой* множества A называется число $m(A) = \sum_{k=1}^{s} m(\Pi_k)$.

Клеточные множества обладают следующими свойствами:

– мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки;

– если клеточные множества A и B не пересекаются, то объединение $A \cup B$ есть клеточное множество и $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;

– если A и B являются клеточными множествами в$\mathbb{R}$, то $A \times B$ есть клеточное множество в $\mathbb{R}^2$;

– декартово произведение n клеточных множеств в $\mathbb{R}$ является клеточным множеством в $\mathbb{R}^n$;

– разность двух клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$ есть клеточное множество;

– пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество;

– если A и B – клеточные множества и $A \subset B$, то

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \text{ и } m(B) > m(A);$$

– если A_1, A_2, ..., A_p — клеточные множества, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} m(A_k).$$

3.2 Множества измеримые по Жордану

Множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества A и B такие, что $A \subset Q \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$.

Мерой измеримого по Жордану множества Q называется такое число $m(Q)$, что для любых двух клеточных множеств A и B, удовлетворяющих условию $A \subset Q \subset B$, выполнено неравенство

$$m(A) \leq m(Q) \leq m(B).$$

Для любого измеримого по Жордану множества Q существует и единственно число $m(Q)$, причем

$$m(Q) = \sup_{A \subset Q} m(A) = \inf_{B \supset Q} m(B).$$

Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет жорданову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется клеточное множество B такое, что $E \subset B$ и $m(B) < \varepsilon$.

Множества жордановой меры нуль обладают следующими свойствами:

– множество E меры нуль измеримо по Жордану и $m(E) = 0$;

– объединение двух множеств (конечного числа множеств) меры нуль есть множество меры нуль;

– подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль;

– если связное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ не содержит ни одной граничной точки множества $B \subset \mathbb{R}^n$, то $A \subset B^\circ$ или $A \subset (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$.

3.3 Критерий измеримости множества в $\mathbb{R}$n

Теорема 1 (критерий измеримости) Для того чтобы множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным, а его граница ∂Q имела жорданову меру нуль.

Ниже приведены свойства меры Жордана:

– (*неотрицательность меры*) для любого измеримого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ всегда $m(Q) \geq 0$;

– если множества Q_1 и Q_2 измеримы по Жордану, то $Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \cap Q_2$, $Q_1 \setminus Q_2$ измеримы по Жордану;

– (*полуаддитивность меры*) если множества Q_1, Q_2, ..., Q_n измеримы по Жордану, то и множество $\bigcup_{k=1}^{n} Q_k$ измеримо по Жордану и

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m(Q_k);$$

– (*свойство конечной аддитивности меры Жордана*) если множества Q_1, Q_2, ..., Q_n измеримы по Жордану и попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(Q_k).$$

3.4 Разбиение измеримых множеств

Пусть множество G измеримо по Жордану в $\mathbb{R}^n$.

Разбиением $\tau = \{ G_k \}$, $k = 1,2,..., m$, множества G называется совокупность измеримых по Жордану в $\mathbb{R}^n$ и попарно непересекающихся множеств G_1, G_2, ..., G_m таких, что $G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k$.

Пусть $d(G_k)$ есть диаметр множества G_k:

$$d(G_k)=\sup_{x,y\in G_k}\rho(x;y).$$

Мелкостью разбиения τ множества G называется число

$$\lambda=\max_{1\le k\le N} d(G_k).$$

Если каждое из множеств G_k, $k=1,2,...,m$, является подмножеством некоторого множества $G_k^{'}$, $k=1,2,...,m$, то говорят, что *разбиение* $\tau=\{G_k\}$ *вписано в разбиение* $\tau'=\{G_k^{'}\}$.

Обозначается: $\tau\prec\tau^{'}$ или $\tau^{'}\succ\tau$.

Разбиения обладают следующими свойствами.

– (*транзитивность*) если $\tau\prec\tau^{'}$ и $\tau^{'}\prec\tau^{''}$, то $\tau\prec\tau^{''}$;

– (*финальность*) для любых двух разбиений $\tau^{'}$ и $\tau^{''}$ множества G существует такое его разбиение τ, что $\tau\succ\tau^{'}$, $\tau\succ\tau^{''}$;

– если $\tau=\{G_k\}$ – разбиение множества G, то $m(G)=\sum_{k=1}^{m}m(G_k)$.

Тема 4 Определение и свойства двойного интеграла

4.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла
4.2 Интегральная сумма Римана
4.3 Определение двойного интеграла
4.4 Основные свойства двойного интеграла

4.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача о массе неоднородной пластины. Пусть плоская пластина G заполнена веществом с известной плотностью $\rho=\rho(x;y)$. Требуется найти массу (количество вещества) всей пластины.

Под *плотностью* вещества в точке $M(x;y)$ понимается предел средней плотности бесконечно малой части G, содержащей точку $M(x;y)$. Разобьем область G произвольно на n частичных областей G_1, G_2,..., G_n, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n (рисунок 3.8). Предположим, что в каждой малой частичной области G_i, $i = 1,2,...,n$, плотность постоянна и равна $\rho(M_i)$, где $M_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка G_i. Тогда масса G_i приблизительно будет равна

$$m_i \approx \rho(M_i)\cdot\Delta S_i = \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i .$$

Для массы всей пластины G получим

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i .$$

Обозначим λ_i, $i = 1,2,...,n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) частичной области G_i. И пусть λ – наибольший из диаметров λ_i, т. е. $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i$. Значение m тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частичных областей G_1, G_2, ..., G_n. Поэтому массой пластины можно считать

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i .$$

З а д а ч а о б о б ъ е м е ц и л и н д р о и д а. Тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x;y)$, снизу областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница области G, а образующая параллельна оси Oz, называется *криволинейным цилиндром* или *цилиндроидом*. Необходимо найти объем данного цилиндроида.

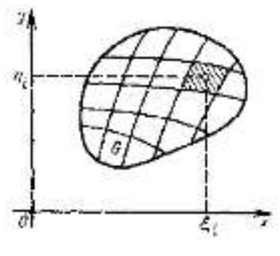

Рисунок 3. 8 – К задаче о массе неоднородной пластины

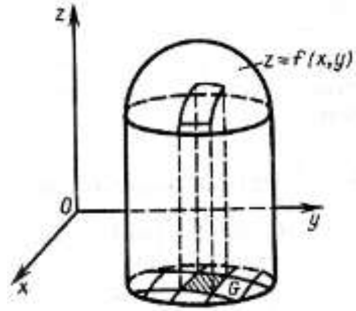

Рисунок 3. 9 – К задаче об объеме цилиндроида

Разобьем область G произвольно на n частичных областей G_1, $G_2, \dots, G_n$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n (рисунок 3. 9). В каждой из областей G_i выберем точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$ и рассмотрим прямой цилиндрический столбик с основанием G_i и высотой $f(\xi_i;\eta_i)$. Очевидно, что объем этого столбика равен $V_i \approx f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i$. Сумма объемов всех цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего объем криволинейного цилиндра. Поэтому

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i .$$

Эта сумма тем точнее выражать искомый объем V, чем меньше каждый из диаметров λ_i, $i = 1,2,\dots,n$, частичных областей G_1, $G_2, \dots, G_n$. Следовательно,

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i ,$$

где λ – наибольший из диаметров λ_i, т. е. $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$.

4.2 Интегральная сумма Римана

Пусть G замкнутая область (замкнутое связное множество) пространства $\mathbb{R}^2$, $f(x;y)$ – произвольная функция, определенная и ограниченная на этом множестве (рисунок 3. 10).

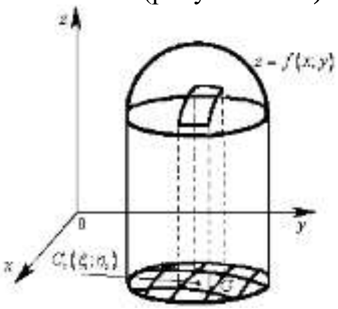

Рисунок 3. 10 – Разбиение множества G

Будем предполагать, что граница области G состоит из конечного числа непрерывных кривых, $y(x)$ или $x(y)$. И пусть

$\tau = \{ G_i \}_{i=1}^{n}$, $G_i \underset{i \neq j}{\cap} G_j = \varnothing$, разбиение области G. Обозначим ΔS_i – площадь G_i, $d(G_i) = \sup\limits_{x,y \in G_i} \rho(x;y)$ – диаметр областей G_i, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$ – мелкость разбиения. В каждой части G_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Тогда $f(\xi_i;\eta_i)$ – значение функции в этой точке.

Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta S_i$$

называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x;y)$ на множестве G, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

Если функция $f(x;y)$, ограничена на G, то для любого разбиения $\tau = \{ G_i \}$, $i = 1,2,..., n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y) \in G_i} f(x;y), \; M_i = \sup_{(x;y) \in G_i} f(x;y).$$

Суммы $s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta S_i$, $S_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta S_i$ называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению τ.

4.3 Определение двойного интеграла

Двойным интегралом от функции $f(x;y)$ по замкнутой области G называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sigma_n(\tau, C_i)$ при $\lambda \to 0$:

$$\iint\limits_G f(x;y)\,dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta S_i,$$

подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* на множестве G, множество G – *областью интегрирования*, x, y – *переменными интегрирования*, dS – *элементом площади*.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если функция $z = f(x;y)$ интегрируема на области G, то она ограничена на этом множестве.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) *Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в области G, то она интегрируема в этой области.*

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{ G_i \}$ с мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ выполнялось неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.*

Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой на множестве G функции $f(x;y)$ предел интегральных сумм существует и не зависит от разбиения области на части. Поэтому, не ограничивая общности, можно разбивать область интегрирования G на части прямыми, параллельными координатным осям (рисунок 3. 11). Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Учитывая, что $dS = dxdy$, можно записать:

$$\iint_G f(x;y)dS = \iint_G f(x;y)dxdy .$$

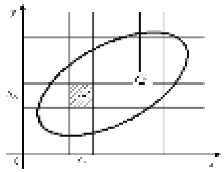

Рисунок 3.11 – Разбиение области G на части прямыми, параллельными координатным осям

4.4 Основные свойства двойного интеграла

Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла:

– $\iint_G dS = \iint_G dxdy = S$, где S – площадь области G;

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемые в области G, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема в G и справедливо равенство:

$$\iint_G \left(\alpha f(x;y)+\beta g(x;y)\right)dxdy=\alpha\iint_G f(x;y)dxdy+\beta\iint_G g(x;y)dxdy;$$

– *(аддитивность)* если область G является объединением областей G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема в области G и справедлива формула:

$$\iint_G f(x;y)dxdy=\iint_{G_1} f(x;y)dxdy+\iint_{G_2} f(x;y)dxdy;$$

– если в области G имеет место неравенство $f(x;y)\geq 0$, то справедливо неравенство $\iint_G f(x;y)dxdy\geq 0$;

– *(монотонность)* если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы в области G и $f(x;y)\leq g(x;y)$ в любой точке $(x;y)\in G$, то

$$\iint_G f(x;y)dxdy\leq\iint_G g(x;y)dxdy;$$

– если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области G, площадь которой S, то

$$m\cdot S\leq\iint_G f(x;y)dxdy\leq M\cdot S,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве G;

– *(теорема о среднем)* если функция $f(x;y)$ непрерывна в области G, площадь которой S, то существует такая точка $P_0(x_0;y_0)\in G$, что выполняется неравенство:

$$\iint_G f(x;y)dxdy=f(x_0;y_0)\cdot S;$$

– произведение интегрируемых в области G функций есть интегрируемая функция;

– если функция $f(x;y)$ интегрируема в области G, то функция $|f(x;y)|$ интегрируема в G и справедливо неравенство:

$$\left|\iint_G f(x;y)dxdy\right|\leq\iint_G |f(x;y)|dxdy.$$

Тема 5 Сведение двойного интеграла к повторному

5.1 Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику
5.2 Сведение повторного интеграла по элементарной области

5.1 Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику

Рассмотрим двойной интеграл по прямоугольнику

$$D=\{\ (x;y)\big|a\le x\le b, c\le y\le d\ \}$$

со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 1 Пусть

1) для функции $f(x;y)$ в прямоугольнике D существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$;

2) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x)=\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ и справедливо равенство:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx.$$

Повторный интеграл $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ можно записывать в виде $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Если в теореме 1 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx.$$

5.2 Сведение повторного интеграла по элементарной области

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции, $y_1(x)\le y_2(x)$ для любого x из отрезка $[a;b]$. Область

$$G=\left\{\,(x;y)\right|\,a\le x\le b,\,y_1(x)\le y\le y_2(x)\left.\right\}$$

называется *элементарной* относительно оси Oy .

Область $G_1=\left\{\,(x;y)\right|x_1(y)\le x\le x_2(y),\,c\le y\le d\left.\right\}$ называется *элементарной* относительно оси Ox . Здесь функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и $x_1(y)\le x_2(y)$.

Теорема 2 Пусть

1) функция $f(x;y)$ определена в элементарной области G ;

2) существует двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$;

3) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy.$$

Если в теореме 2 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_{G_1} f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx.$$

Если область интегрирования не является элементарной, то необходимо данную область разбить на части, каждая из которых является элементарной.

В случае, когда $f(x,y)=\varphi(x)\cdot g(y)$ и область D – прямоугольник, то

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\int\limits_c^d g(y)\,dy .$$

Тема 6 Замена переменных в двойном интеграле

6.1 Криволинейные координаты
6.2 Теорема о замене переменных в двойном интеграле
6.3 Переход к полярным координатам

6.1 Криволинейные координаты

Взаимно однозначное отображение $u=u(x;y)$, $v=v(x;y)$, открытого множества $G\subset\mathbb{R}^2_{xy}$ на множество $G^*\subset\mathbb{R}^2_{uv}$ ставит в соответствие каждой точке $(x;y)\in G$ пару чисел $(u;v)\in G^*$. Поэтому данное отображение можно рассматривать как переход к новым координатам u и v точки $(x;y)$ одной и той же плоскости G. В этом случае множество G^* представляет собой множество пар новых координат точек множества G. Обратный переход от координат u и v к координатам x и y осуществляется с помощью отображения (рисунок 3. 12) $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$.

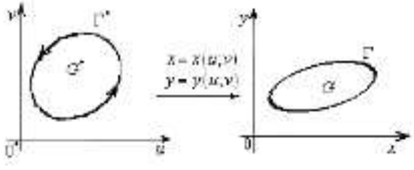

Рисунок 3. 12 – Отображение области G^* в область G при замене переменных $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, для которых одна из координат u или v постоянна, называется *координатной линией*.

При $u = u_0$ имеем координатную линию $x = x(u_0; v)$, $y = y(u_0; v)$; при $v = v_0$ имеем координатную линию $x = x(u; v_0)$, $y = y(u; v_0)$. В двух случаях получаются уравнения, являющиеся параметрическими уравнениями некоторых кривых. Координаты u и v называются *криволинейными координатами*.

Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным u и v по формулам $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$. Эти функции осуществляют отображение области $G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на область $\mathbb{R}^2_{xy}$. Область G называется *образом* области, а область G^* – *прообразом* области G.

6.2 Теорема о замене переменных в двойном интеграле

Теорема 1 Пусть 1) отображение $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$ *переводит замкнутую ограниченную область* G^* *в замкнутую ограниченную область* G *и является взаимно однозначным;*

2) функции $x(u; v)$ *и* $y(u; v)$ *имеют в области* G^* *непрерывные частные производные первого порядка;*

3) якобиан отображения $J = \dfrac{D(x; y)}{D(u; v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ *во всех области* G^**;*

4) функция $f(x; y)$ *непрерывна в области* G.

Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_{G} f(x; y) dxdy = \iint\limits_{G^*} f(x(u; v); y(u; v)) |J| dudv.$$

Теорема верна также и в случае, когда условие 1) или 3) нарушается в отдельных точках или на отдельных кривых.

6.3 Переход к полярным координатам

Если область G ограничена дугами окружности, то удобно переходить к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где

$0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Якобиан перехода к полярным координатам равен:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(\rho;\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r .$$

Поэтому формула замены переменных запишется в виде:

$$\iint\limits_{G} f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r\, drd\varphi .$$

Если область G ограничена дугами эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то удобно переходить к обобщенным полярным координатам $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом якобиан отображения равен $J = abr$.

Тема 7 Формула Грина

7.1 Формула Грина

7.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

7.1 Формула Грина

Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая элементарная относительно оси Ox или Oy область G, ограниченная замкнутым контуром Γ.

Теорема 1 (формула Грина) Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области G, то имеет место формула

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy ,$$

где контур Γ обходится в положительном направлении.

Формула Грина справедлива для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей. Формула Грина связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

Площадь области G, ограниченной замкнутым контуром Γ, с помощью формулы Грина вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{G} dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx\ .$$

Плоская область G называется *односвязной*, если любой замкнутый контур Γ, лежащий внутри этой области, ограничивает область G_{Γ}, полностью принадлежащую G.

7.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Теорема 2 Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области G. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, расположенной в G, верно

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0\ ;$$

2) для любых двух точек A и B области G значение интеграла

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$$

не зависит от выбора пути интегрирования AB, целиком лежащего в G;

3) выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, определенной в области G:

$$Pdx + Qdy = dF\ ;$$

4) в области G всюду $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тема 8 Приложения двойного интеграла

8.1 Геометрические приложения двойного интеграла

8.2 Физические приложения двойного интеграла

8.1 Геометрические приложения двойного интеграла

Двойные интегралы используются для вычисления:

– *площади* S *плоской фигуры* G

$$S=\iint_G dxdy;$$

– *площади* S *поверхности*, заданной уравнением $f(x;y)$

$$S=\iint_G \sqrt{1+\left(f_x^{'}\right)^2+\left(f_y^{'}\right)^2}\,dxdy,$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy;

– *объема тела*, ограниченного сверху поверхностью $f(x;y)>0$, снизу – плоскостью $z=0$, с боковых сторон – цилиндрической поверхностью, у которой образующая параллельна оси Oz, а направляющей служит контур области G

$$V=\iint_G f(x;y)\,dxdy.$$

8.2 Физические приложения двойного интеграла

Двойные интегралы используются для вычисления:

– *массы плоской пластины* G с плотностью $\rho(x;y)$

$$m=\iint_G \rho(x;y)\,dxdy;$$

– *статических моментов* S_x, S_y относительно осей Ox, Oy соответственно:

$$S_x=\iint_G y\cdot\rho(x;y)\,dxdy,\quad S_y=\iint_G x\cdot\rho(x;y)\,dxdy;$$

– *координат* $(x_c;y_c)$ *центра тяжести* плоской пластины G:

$$x_c=\frac{S_y}{m},\qquad y_c=\frac{S_x}{m};$$

– *моментов инерции* плоской пластины G относительно осей Ox и Oy

$$I_x = \iint_G y^2 \rho(x;y)\,dxdy, \qquad I_y = \iint_G x^2 \rho(x;y)\,dxdy;$$

– *момента инерции* плоской пластины G относительно начала координат $O(0;0)$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_G \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)\,dxdy.$$

Тема 9 Определение и свойства тройного интеграла

9.1 Задача о массе пространственного тела
9.2 Определение тройного интеграла
9.3 Свойства тройного интеграла
9.4 Вычисление тройного интеграла

9.1 Задача о массе пространственного тела

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется ограниченное тело Q с переменной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется найти массу этого тела.

Для решения этой задачи, разобьем тело на части Q_1, Q_2, ..., Q_n объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. Предположим, что в каждой малой части Q_i, $i = 1,2,...,n$, плотность постоянна и равна $\rho(C_i)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ – произвольная точка Q_i. Тогда масса части Q_i приблизительно будет равна

$$m_i \approx \rho(C_i)\cdot\Delta V_i = \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i.$$

Для массы всего тела Q получим

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i.$$

9.2 Определение тройного интеграла

Обозначим λ_i, $i = 1,2,...,n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) части Q_i тела Q. И пусть λ – наибольший из диаметров λ_i , т.е. $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i$. Значение m тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частей Q_1, Q_2, ..., Q_n. Поэтому массой всего тела можно считать

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i \ .$$

Пусть Q замкнутая область пространства $\mathbb{R}^3$, на котором задана непрерывная функция $f(x;y;z)$. И пусть $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, разбиение области Q на частичные области Q_1, Q_2, ..., Q_n с объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. При этом мелкость разбиения есть $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d(Q_i)$, где $d(Q_i)$ – диаметр частичной области Q_i, $i=1,2,...,n$. В каждой малой части Q_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$. Сумма $\sigma_n(\tau,C_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i$ называется *интегральной суммой* Римана для функции $f(x;y;z)$ на множестве Q, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i\in Q_i$, $i=1,2,...,n$. Если функция $f(x;y;z)$, ограничена на Q, то для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z),\ M_i=\sup_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z).$$

Суммы $s_\tau=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta V_i$, $S_\tau=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta V_i$ называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению $\tau=\{Q_i\}$ множества Q .

Тройным интегралом от функции $f(x;y;z)$ по множеству Q называется предел (если он существует) интегральной суммы $\sigma_n(\tau,C_i)$ при $\lambda\to 0$:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i \ ,$$

подынтегральная функция $f(x;y;z)$ называется *интегрируемой* по замкнутой области Q, множество Q – *областью интегрирования*, x, y, z – *переменными интегрирования*, dv – *элементом* объема.

Не ограничивая общности, можно считать, что $dv = dxdydz$. Поэтому можно записать:

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \iiint_V f(x;y;z)dv.$$

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если функция $f(x;y;z)$ интегрируема в замкнутой области Q, то она ограничена в этой области.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в замкнутой области Q, то она интегрируема в ней.

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в замкнутой области $Q \subset \mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{Q_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ выполнялось неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

9.3 Свойства тройного интеграла

Для тройного интеграла справедливы следующие *свойства*:

– $\iiint_Q dv = V$, где V – объем области Q;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы в области Q, то функция $\alpha \cdot f(x;y;z) + \beta \cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема в Q и справедливо равенство:

$$\iiint_Q (\alpha f(x;y;z) + \beta g(x;y;z))dv =$$

$$= \alpha \iiint_Q f(x;y;z)dv + \beta \iiint_Q g(x;y;z)dv;$$

– *(аддитивность)* если область Q является объединением областей Q_1 и Q_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых функция $f(x;y;z)$ интегрируема, то $f(x;y;z)$ также интегрируема на Q и справедлива формула:

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv = \iiint_{Q_1} f(x;y;z)dv + \iiint_{Q_2} f(x;y;z)dv;$$

– *(монотонность)* если в области Q имеет место неравенство $f(x;y;z) \geq 0$, то

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv \geq 0;$$

– если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то

$$m \cdot V \leq \iiint_Q f(x;y;z)dv \leq M \cdot V,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве Q.

– *(теорема о среднем)* если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то в этой области существует такая точка $P_0(x_0;y_0z_0)$, что

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv = f(x_0;y_0;z_0) \cdot V.$$

9.4 Вычисление тройного интеграла

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных.

Пусть функция $f(x;y;z)$ определена на измеримом множестве

$$Q = \{(x;y;z) \mid (x;y) \in G \subset Oxy,\ z_1(x;y) \leq z \leq z_2(x;y)\},$$

где $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ – непрерывные функции в области G. И пусть каждая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области Q не более чем в двух точках (рисунок 3. 13), т. е. пространственная область Q является элементарной относительно оси Oz.

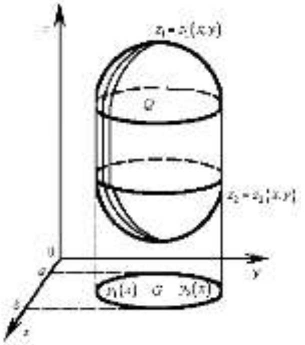

Рисунок 3. 13 – Пространственная область Q

Т е о р е м а 4 Пусть 1) существует тройной интеграл

$$\iiint\limits_{Q} f(x;y;z)dxdydz;$$

2) $\forall (x;y)\in G$ *существует определенный интеграл*

$$I(x;y)=\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

(при постоянных x *и* y *).*

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint\limits_{G} I(x;y)dxdy=\iint\limits_{G} dxdy\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz=\iint\limits_{G} dxdy\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Данная формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G.

Выражение $I(x;y)=\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$ представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и области $G=\left\{ (x;y) \middle| a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_1(x)\right\}$, по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы о сведении двойного интеграла к повторному, то, переходя от двойного интеграла $\iint\limits_G I(x;y)dxdy$ к повторному интегралу, получаем

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_1(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz .$$

Если пространственная область Q не является элементарной, то ее необходимо разбить на конечное число элементарных областей. Порядок интегрирования в формуле при определенных условиях может быть иным, т. е. переменные x, y, z можно менять местами.

Пусть Q – прямоугольный параллелепипед

$$Q = \{(x;y;z) \mid a \le x \le b, c \le y \le d,\ p \le z \le q\},$$

$f(x,y,z)$ – непрерывная в Q функция. Тогда:

$$\iiint\limits_Q f\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f\,dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b dx \int\limits_p^q f\,dz = \int\limits_p^q dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f\,dx .$$

Если $f(x,y,z) = \varphi(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$ и область Q – прямоугольный параллелепипед, то

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \varphi(x)dx \int\limits_c^d g(y)dy \int\limits_p^q h(z)dz .$$

Тема 10 Замена переменных в тройном интеграле

10.1 Формула замена переменных в тройном интеграле
10.2 Цилиндрические координаты
10.3 Сферические координаты
10.4 Приложения тройного интеграла

10.1 Формула замена переменных в тройном интеграле

Замена переменных в тройном интеграле $\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz$ состоит в переходе от координат x, y, z к новым криволинейным координатам u, v, w по формулам

$$x = x(u;v;w),\ y = y(u;v;w),\ z = z(u;v;w),$$

где $(u;v;w) \in Q^* \subset \mathbb{R}^3_{uvw}$.

Данные функции осуществляют взаимно-однозначное отображение области $Q^* \subset \mathbb{R}^3_{uvw}$ на область $Q \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$.

Теорема 5 *Пусть 1) Q и Q^* замкнутые ограниченные области в пространствах $\mathbb{R}^3_{xyz}$* и *$\mathbb{R}^3_{uvw}$ соответственно;*

2) функция $f(x;y;z)$ ограничена и непрерывна в области Q;

3) функции $x(u;v;w)$, $y(u;v;w)$, $z(u;v;w)$ имеют в области Q^* непрерывные частные производные первого порядка и якобиан

$$J = \frac{D(x;y;z)}{D(u;v;w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в области } Q^*.$$

Тогда справедлива формула замены переменных в тройном интеграле

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{Q^*} f\left(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w)\right)|J|\,dudvdw.$$

10.2 Цилиндрические координаты

Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно определяется тройкой чисел $(r;\varphi;z)$, где $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M', z – аппликата точки M (рисунок 3.14). Тройка чисел $(r;\varphi;z)$ называется *цилиндрическими координатами* точки M.

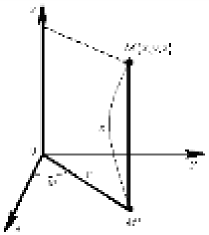

Рисунок 3. 14 – Связь декартовых и цилиндрических координат

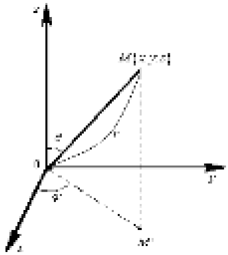

Рисунок 3. 15 – Связь декартовых и сферических координат

Переход от прямоугольных координат $(x; y; z)$ к цилиндрическим координатам $(r; \varphi; z)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Иногда в качестве промежутка изменения φ берётся промежуток $-\pi < \varphi \le \pi$.

Якобиан отображения есть $J = r$.

10.3 Сферические координаты

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x; y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy . Точка M однозначно задается тройкой чисел $(r; \theta; \varphi)$, где r – расстояние точки M до точки O (начала координат), θ – угол между лучами OM и Oz , φ – полярный угол точки M' на плоскости Oxy (рисунок 3. 15). Тройка чисел $(r; \theta; \varphi)$ называется *сферическими координатами* точки M .

Переход от прямоугольных координат $(x; y; z)$ к сферическим координатам $(r; \theta; \varphi)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Якобиан отображения есть $J = r^2 \sin\theta$.

Если тело ограничено эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ или его частью, переходят к обобщенным сферическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = a\,r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\,r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\,r\cos\theta, \end{cases}$$

якобиан отображения равен $J = abcr^2\sin\theta$.

10.4 Приложения тройного интеграла

Пусть Q материальное тело с плотностью $\rho(x;y;z)$. Тогда тройной интеграл используется для вычисления:

– *объема тела*

$$V = \iiint\limits_Q dxdydz\,;$$

– *массы тела*

$$m = \iiint\limits_Q \rho(x;y;z)\,dxdydz\,;$$

– *статических моментов* M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy соответственно:

$$M_{yz} = \iiint\limits_Q x\rho(x;y;z)\,dxdydz\,;$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_Q y\rho(x;y;z)\,dxdydz\,;$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_Q z\rho(x;y;z)\,dxdydz\,;$$

– *координат центра* $(x_c;y_c;z_c)$ тяжести тела:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \qquad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}\,;$$

– *моментов инерции* I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy соответственно:

$$I_{yz} = \iiint\limits_Q x^2 \rho(x;y;z)\,dxdydz\,;$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_Q y^2 \rho(x;y;z)\,dxdydz\,;$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_Q z^2 \rho(x;y;z)\,dxdydz\,;$$

– *моментов инерции* I_x, I_y, I_z, I_0 тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$I_x = I_{zx} + I_{xy}, \qquad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \qquad I_z = I_{yz} + I_{zx}\,;$$

$$I_0 = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy}\,.$$

Тема 11 Элементы теории поверхностей

11.1 Понятие поверхности

Пусть функция $f(x;y)$ непрерывно дифференцируема на замкнутом множестве $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$, т. е. она определена и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на $\overline{G}$.

Непрерывное отображение $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ замыкания $\overline{G}$ плоской области $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ в пространство $\mathbb{R}^3$ называется *поверхностью*:

$$\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; z = f(x;y), (x;y) \in G \subset \mathbb{R}^2_{xy} \right\}.$$

Образ множества $\overline{G}$ при отображении f называется *носителем* поверхности Ω.

Поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно задавать следующими способами:

– *явное*: $\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; z = f(x;y), (x;y) \in G \subset \mathbb{R}^2_{xy} \right\}$;

– *неявное*: $\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x;y) \in G \subset \mathbb{R}^2_{xy} \;\; F(x;y;z) = 0 \right\}$;

– *параметрическое*:

$$\Omega = \left\{ x(u;v), y(u;v), z(u;v) \middle| \ (u;v) \in G \subset \mathbb{R}^2_{uv} \right\};$$

– *векторный*: $\Omega = \left\{ \vec{r}(u;v) \middle| \ (u;v) \in G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv} \right\}$, где

$$\vec{r}(u;v) = x(u;v)\cdot \vec{i} + y(u;v)\cdot \vec{j} + z(u;v)\cdot \vec{k}.$$

Зафиксируем точку v_0. Множество точек поверхности Ω $\vec{r} = \vec{r}(u;v_0)$ называется *координатными линиями* на этой поверхности. Аналогично при фиксированной переменной $u = u_0$ множество линий $\vec{r} = \vec{r}(u_0;v)$ является координатными линиями поверхности Ω.

Поверхность Ω называется *простой*, если через каждую ее точку проходит ровно по одной координатной линии из каждого семейства, т. е. отображение $f : \bar{G} \to \mathbb{R}^3$ является взаимно однозначным. Поверхность Ω называется *замкнутой*, если через каждую ее точку проходит более одной координатной линии из каждого семейства.

Множество точек поверхности Ω соответствующих граничным точкам области G, образуют *границу* (*край*) поверхности. Точки поверхности Ω, не принадлежащие краю, называются ее *внутренними* точками. Замкнутые поверхности – это те поверхности, которые не имеют края.

Говорят, что поверхность Ω является *непрерывно дифференцируемой*, если функции $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, $z = z(u;v)$ непрерывно дифференцируемы.

Пусть задана непрерывно дифференцируемая поверхность Ω векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u;v)$. И пусть $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ – частные производные вектор функций $\vec{r} = \vec{r}(u;v_0)$ и $\vec{r} = \vec{r}(u_0;v)$, т. е. $\vec{r}_u$ – касательный вектор к координатной линии $\vec{r} = \vec{r}(u;v_0)$, $\vec{r}_v$ – касательный вектор к координатной линии $\vec{r} = \vec{r}(u_0;v)$.

Под *кривыми на поверхности* Ω понимаются кривые, задаваемые в виде $\vec{r} = \vec{r}(u(t);v(t))$, где $t \in [a;b]$, функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемые функции. Тогда согласно правилу дифференцирования сложной функции двух переменных, имеем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

Видно, что касательная к любой кривой на поверхности Ω лежит в плоскости векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

Точка $M_0 = \vec{r}(u_0;v_0)$ поверхности Ω называется *особой*, если в ней векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ коллинеарны и $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = 0$. Точка $M_0 = \vec{r}(u_0;v_0)$ поверхности Ω называется *неособой*, если в ней векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны и $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$.

Поверхность Ω называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Поверхность называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число простых гладких частей.

11.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана векторным уравнением. В силу неколлинеарности векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в неособой точке $M_0(u_0;v_0)$, в ней однозначно определена плоскость, содержащая эти векторы. Эта плоскость содержит все касательные ко всем непрерывно дифференцируемым кривым на поверхности в данной неособой точке.

Плоскость, проходящая через неособую точку $M_0(u_0;v_0)$ поверхности Ω, параллельно векторам $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$ называется *касательной плоскостью* к поверхности Ω в этой точке. *Вектором нормали* к гладкой поверхности Ω в точке M_0 называется вектор $\vec{N}$, перпендикулярный касательной плоскости в точке M_0. (рисунок 3. 16).

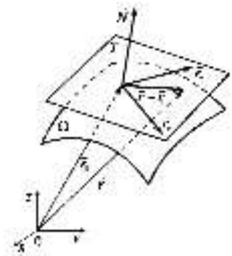

Рисунок 3. 16 – Касательная плоскость и вектор нормали

Прямая, проходящая через точку M_0 в направлении нормали, называется *нормальной прямой*.

В таблице 3. 1 приведены уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности Ω в точке M_0 при различных способах задания поверхности.

Таблица 3. 1 – Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности Ω в точке M_0

Вид задания поверхности	Уравнение касательной плоскости	Уравнение нормали
Векторное $\vec{r} = r(u,v)$	$(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{r}_u\vec{r}_v = 0$	$\vec{r} - \vec{r}_0 = k\left(\vec{r}_u(M_0) \times \vec{r}_v(M_0)\right)$, $k \in \mathbb{R}$
Параметрическое $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0$	$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$
Явное $z = z(x,y)$	$z - z_0 =$ $= z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0)$	$\dfrac{x - x_0}{-z'_x} = \dfrac{y - y_0}{-z'_y} = \dfrac{z - z_0}{1}$

Единичной нормалью к поверхности Ω называется вектор $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}$.

Пусть на непрерывно дифференцируемой простой поверхности $\Omega = \left\{ \vec{r}(u;v) \middle| (u;v) \in G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv} \right\}$ задана кривая в векторной форме $\Gamma = \left\{ \vec{r}\left(u(t);v(t)\right) \middle| a \le t \le b \right\}$. В точке $M(u;v)$ кривой Γ рассмотрим касательный вектор $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$, который лежит в касательной плоскости к поверхности Ω. Обозначим $a_{11} = \vec{r}_u^{\,2}$, $a_{12} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $a_{22} = \vec{r}_v^{\,2}$. Выражение

$$(d\vec{r})^2 = a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 .$$

называется *первой квадратичной формой поверхности*.

Первая квадратичная форма простой поверхности является квазиопределенной, а во всякой неособой точке является положительно определенной.

Учитывая, что $\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right| = 1$, где $l = l(t)$ – переменная длина дуги кривой, то первая квадратичная форма поверхности равна квадрату дифференциала длины кривой на поверхности:

$$(dl)^2 = (d\vec{r})^2 = a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 .$$

Если длина дуги dl отсчитывается от начала рассматриваемой кривой, т. е. $\frac{dl}{dt} > 0$, то

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} .$$

Отсюда длина L_Γ кривой Γ вычисляется по формуле:

$$L_\Gamma = \int_a^b \frac{dl}{dt}dt = \int_a^b \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt .$$

11.3 Площадь поверхности

Рассмотрим на простой поверхности

$$\Omega = \{ \vec{r}(u;v) |\ (u;v) \in G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv} \}$$

криволинейный параллелограмм, ограниченный координатными линиями u, $u + \Delta u$, v, $v + \Delta v$. Векторы $\vec{r}_u \Delta u$ и $\vec{r}_v \Delta v$ являются касательными к координатным линиям, проходящим через точку $M(u;v)$ поверхности (рисунок 3. 17). Длины этих векторов отличаются от длин сторон криволинейного параллелограмма на $o(\Delta u)$ и $o(\Delta v)$ соответственно при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$.

Рисунок 3. 17 – Элемент поверхности

Поэтому можно считать, что площадь криволинейного параллелограмма приближенно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_u \Delta u$ и $\vec{r}_v \Delta v$ при $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$:

$$\Delta S \approx \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| \cdot \Delta u \Delta v .$$

Элементом поверхности Ω называется выражение вида

$$dS = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\, du dv .$$

Формально считается, что площадь простой поверхности Ω равна двойному интегралу

$$S = \iint_G dS = \iint_G \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\, du dv ,$$

где область G – измерима по Жордану.

11.4 Ориентация поверхности

Единичная нормаль $\vec{n}$, направленная наружу от поверхности Ω, называется *внешней* нормалью поверхности Ω, а противоположная ей нормаль $(-\vec{n})$, направленная внутрь поверхности Ω, называется *внутренней нормалью*.

Поверхность Ω называется *двухсторонней*, если для любой точки $M(x;y;z) \in \Omega$ и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности Ω и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке M направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления при возвращении в исходную точку M. Для *односторонней* поверхности существует такой контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

Двусторонняя поверхность Ω называется *ориентированной*, если для нее определены внешняя $\vec{n}(M)$ и внутренняя $-\vec{n}(M)$ нормали. Выбор определенной стороны называется *ориентацией поверхности*.

Тема 12 **Поверхностный интеграл 1-го рода**

12.1 Задача о массе изогнутой пластины

Пусть на поверхности Ω непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется определить массу материальной поверхности Ω.

Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. Наибольший из диаметров обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Omega_i)$. Предположим, что в каждой части Ω_i, $i=1,2,...,n$, плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, где точка $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\in\Omega_i$. Тогда масса i-ой части Ω_i поверхности Ω приблизительно равна

$$m_i \approx \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i .$$

Для массы всей поверхности имеем

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i .$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, получим точное значение массы

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i .$$

12.2 Определение поверхностного интеграла 1-го рода

Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности $\Omega\in\mathbb{R}^3$, с площадью S определена непрерывная ограниченная функция $f(x;y;z)$. Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. На каждой частичной поверхности Ω_i возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ (рисунок 3. 18).

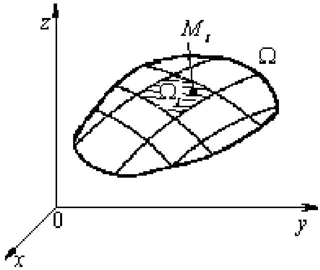

Рисунок 3. 18 – Разбиение поверхности Ω.

Сумма $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)\cdot\Delta S_i$ называется *интегральной суммой* для функции $f\left(x;y;z\right)$ по поверхности Ω.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d\left(\Omega_i\right)$.

Поверхностным интегралом 1-го рода от функции $f\left(x;y;z\right)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы:

$$\iint\limits_{\Omega} f\left(x;y;z\right)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)\cdot\Delta S_i\ ,$$

функция $f\left(x;y;z\right)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω, поверхность Ω – *поверхностью интегрирования*, dS – *элемент поверхности*.

Основные *свойства* поверхностного интеграла 1- го рода:

– $\iint\limits_{\Omega} dS = ½$, где S – площадь поверхности Ω;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f\left(x;y;z\right)$ и $g\left(x;y;z\right)$ интегрируемы на поверхности Ω, то функция $\alpha\cdot f\left(x;y;z\right)+\beta\cdot g\left(x;y;z\right)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\alpha f+\beta g\right)dS = \alpha\iint\limits_{\Omega} f\,dS + \beta\iint\limits_{\Omega} g\,dS\ ;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $f\left(x;y;z\right)$ интегрируема на

Ω_1 и Ω_2, то функция $f(x;y;z)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедлива формула:

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS = \iint_{\Omega_1} f(x;y;z)dS + \iint_{\Omega_2} f(x;y;z)dS\ ;$$

– *(монотонность)* если на поверхности Ω выполнено неравенство $f(x;y;z) \le g(x;y;z)$, то

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS \le \iint_{\Omega} g(x;y;z)dS\ ;$$

– *(оценка интеграла)* $\left|\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS\right| \le \iint_{\Omega} \left|f(x;y;z)\right| dS$;

– *(теорема о среднем)* если $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, то на этой поверхности существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS = f(x_0;y_0;z_0)\cdot S\ ,$$

где S – площадь поверхности Ω.

12.3 Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла по области G, являющейся проекцией поверхности Ω на плоскость Oxy.

Поверхность Ω задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in W\ .$$

Тогда поверхностный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\iint_{\Omega} f(x,y,z)dS = \iint_{W} f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}dudv\ ,$$

где $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$; $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$; $F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'$.

Пусть Ω поверхность, заданная уравнением $z = z(x;y)$. Здесь функция $z(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x' и z_y' в замкнутой области G. И пусть функция $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, и, следовательно, интегрируема на ней. Учитывая, что элемент поверхности есть $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$, имеем

$$\iint_\Omega f(x;y;z)\,dS = \iint_G f\big(x;y;z(x;y)\big)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy .$$

Поверхность Ω задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$, где $F_z' \neq 0$, $\forall (x,y,z) \in \Omega$. Функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции. Поэтому уравнение $F(x,y,z) = 0$ определяет функцию $z = z(x,y)$, для которой $z_x' = -\dfrac{F_x'}{F_z'}$; $z_y' = -\dfrac{F_y'}{F_z'}$.

Тогда имеем

$$\iint_\Omega f(x,y,z)\,dS = \iint_G f(x,y,z)\frac{1}{|F_z'|}\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}\,dxdy ,$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy $(z = 0)$. Для вычисления интеграла z выражается из уравнения поверхности.

12.4 Приложения поверхностного интеграла 1-го рода

Поверхностные интегралы 1-го рода применяются для вычисления**:**

– *площади поверхности* Ω $\iint_\Omega dS = \mathrm{S}$;

– *массы материальной поверхности* Ω с непрерывно распределенным веществом известной плотности $\rho(x;y;z)$

$$m = \iint_\Omega \rho(x;y;z)\,dS ;$$

– *статических моментов* S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} материальной поверхности Ω относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Ozx соответственно:

$$S_{xy} = \iint_\Omega z \cdot \rho(x;y;z)\,dS ;$$

$$S_{yz} = \iint_\Omega x \cdot \rho(x;y;z)\,dS ;$$

$$S_{zx}=\iint_{\Omega} y\cdot\rho\left(x;y;z\right)dS\ ;$$

– *координат центра тяжести* $\left(x_c;y_c;z_c\right)$ материальной поверхности Ω

$$x_c=\frac{S_{yz}}{m},\ y_c=\frac{S_{zx}}{m},\qquad z_c=\frac{S_{xy}}{m}\ ;$$

– *моментов инерции* M_x, M_y, M_z, M_0 материальной поверхности Ω относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O\left(0;0\right)$ соответственно:

$$M_x=\iint_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\cdot\rho\left(x;y;z\right)dS\ ;$$

$$M_y=\iint_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\cdot\rho\left(x;y;z\right)dS\ ;$$

$$M_z=\iint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\cdot\rho\left(x;y;z\right)dS\ ;$$

$$M_0=\iint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\rho\left(x;y;z\right)dS\ .$$

Тема 13 Поверхностный интеграл 2-го рода

13.1 Задача о потоке жидкости

13.2 Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода

13.3 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

13.4 Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода

13.1 Задача о потоке жидкости

Пусть пространство $Oxyz$ заполнено движущейся однородной жидкостью, скорость которой в каждой точке $M\left(x;y;z\right)$ задана вектором

$$\vec{V}=P\left(x;y;z\right)\cdot\vec{i}+Q\left(x;y;z\right)\cdot\vec{j}+R\left(x;y;z\right)\cdot\vec{k}\ ,$$

где непрерывные функции $P\left(x;y;z\right)$, $Q\left(x;y;z\right)$, $R\left(x;y;z\right)$ – проекции вектора $\vec{V}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно. Требуется найти количество жидкости Π, протекающей за единицу времени t через некоторую ориентированную поверхность Ω.

Будем предполагать, что поверхность Ω не препятствует движению и ограничена контуром Γ, при этом плотность жидкости есть $\rho(x;y;z)=1$.

Пусть $\vec{n}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$ – единичный вектор нормали поверхности Ω в текущей точке $M(x;y;z)$, $|\vec{n}|=1$, и его направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ являются непрерывными функциями координат x, y, z точек данной поверхности.

Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. Наибольший из диаметров обозначим $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d_i$. В каждой части Ω_i выберем точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$. Приближенно можно считать, что при достаточно мелком разбиении поверхности Ω скорость $\vec{V}$ во всех точках элементарной части Ω_i постоянна и равна $\vec{V}_i=\vec{V}(M_i)=\vec{V}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, а частичные поверхности Ω_i – плоские (рисунок 3.19).

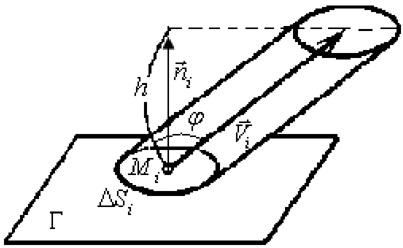

Рисунок 3. 19 – Задача о потоке жидкости

Тогда количество жидкости $\Delta\Pi_i$, протекающей через частичную поверхность Ω_i за единицу времени в направлении вектора $\vec{V}_i=\vec{V}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, приблизительно равна объему цилиндра с основанием ΔS_i и высотой h_i:

$$\Delta\Pi_i \approx \Delta S_i\cdot h_i,$$

где h_i – проекция вектора $\vec{V}_i$ на $\vec{n}_i$.

По свойству проекции имеем $h_i = \left|\vec{V}_i\right| \cdot \cos\varphi_i$, где φ_i – угол между $\vec{V}_i$ и $\vec{n}_i$. Тогда

$$h_i = \left|\vec{V}_i\right| \cdot \cos\varphi_i = \left|\vec{V}_i\right| \cdot 1 \cdot \cos\varphi_i = \vec{V}_i \cdot \vec{n}\,.$$

где $\vec{V}_i \cdot \vec{n}$ – скалярное произведение векторов $\vec{V}_i$ и $\vec{n}_i$.

Поэтому

$$\Delta\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot \left(\vec{V}_i \cdot \vec{n}\right).$$

Количество жидкости через всю поверхность Ω равно

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\Pi_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot \left(\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i\right).$$

В координатной форме поток жидкости Π равен

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i\right) \cdot \Delta S_i\,,$$

где $P_i = P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, $Q_i = Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, $R_i = R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$.

Точное значение потока получим, переходя к пределу при $\lambda \to 0$:

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i\right) \cdot \Delta S_i\,.$$

Поскольку площадь проекции равна произведению площади поверхности на косинус угла между проекцией и поверхностью:

$$\left(\Delta\Omega_i\right)_{yz} = \Delta S_i \cdot \cos\alpha_i\,,$$

$$\left(\Delta\Omega_i\right)_{zx} = \Delta S_i \cdot \cos\beta_i\,,$$

$$\left(\Delta\Omega_i\right)_{xy} = \Delta S_i \cdot \cos\gamma_i\,,$$

то поток можно записать в виде

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \left(\Delta\Omega_i\right)_{yz} + Q_i \cdot \left(\Delta\Omega_i\right)_{zx} + R_i \cdot \left(\Delta\Omega_i\right)_{xy}\,.$$

13.2 Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода

Пусть двусторонняя поверхность Ω с выбранным направлением единичного вектора нормали $\vec{n}$ задана явно непрерывно-дифференцируемой функцией $z(x;y)$ в области $G \subset Oxy$. И пусть в точках поверхности Ω определена непрерывная функция

$R(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности Ω разобьем на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n. Обозначим σ_1, σ_2, ..., σ_n проекции этих частей на плоскость Oxy. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_i = (\Omega_i)_{xy}$, берется со знаком «$+$», если выбрана внешняя сторона Ω^+ поверхности (нормаль $\vec{n}$ к выбранной стороне составляет с осью Oz острый угол), со знаком «–», если выбрана внутренняя сторона Ω^- поверхности.

Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i$ называется *интегральной суммой* для функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Omega_i)$.

Поверхностным интегралом 2-го рода от функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности называется предел (если он существует) интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\iint\limits_{\Omega} R(x;y;z)\,dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i ,$$

функция $R(x;y;z)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω по переменным x и y.

Аналогично определяются поверхностные интегралы 2-го рода по выбранной стороне поверхности Ω по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности Ω, соответственно:

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot(\Omega_i)_{yz} ;$$

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)\,dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot(\Omega_i)_{zx} .$$

Общим поверхностным интегралом 2-го рода называется интеграл вида

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz + Q(x;y;z)\,dzdx + R(x;y;z)\,dxdz .$$

Поверхностный интеграл 2-го рода обладает следующими *свойствами*:

– для общего поверхностного интеграла 2-го рода справедливо равенство:

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iint\limits_{\Omega} Pdydz + \iint\limits_{\Omega} Qdzdx + \iint\limits_{\Omega} Rdxdy\ ;$$

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y;z)$ и $P_2(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне поверхности Ω, то функция $\alpha \cdot P_1(x;y;z) \pm \beta \cdot P_2(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедливо равенство:

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha P_1 \pm \beta P_2) dydz = \alpha \iint\limits_{\Omega} P_1 dydz \pm \beta \iint\limits_{\Omega} P_2\, dydz\ ;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω, из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $P(x;y;z)$ интегрируема по выбранным сторонам Ω_1 и Ω_2, то функция $P(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz = \iint\limits_{\Omega_1} P(x;y;z)dydz + \iint\limits_{\Omega_2} P(x;y;z)dydz\ ;$$

– *(оценка интеграла)* если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне двусторонней поверхности Ω и $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \le M$ во всех точках поверхности, то

$$\left| \iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz \right| \le M \cdot ½\,,$$

где S – площадь поверхности;

– *(ориентированность)* если Ω^- противоположная сторона к стороне Ω^+ поверхности Ω, то

$$\iint\limits_{\Omega^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = -\iint\limits_{\Omega^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz\ .$$

13.3 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению двойного интеграла, учитывая проекции поверхности на соответствующие плоскости:

$$\iint_{\Omega} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint_{G_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dxdy,$$

где G_{xy} – проекция Ω на плоскость Oxy; знак “+” берется в случае, если $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$ (γ угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oz);

$$\iint_{\Omega} R(x,y,z)\,dydz = \pm\iint_{G_{yz}} R\big(x(y,z),y,z\big)\,dydz,$$

где G_{yz} – проекция Ω на плоскость Oyz; знак “+” берется в случае, если $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ (α угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Ox);

$$\iint_{\Omega} R(x,y,z)\,dzdx = \pm\iint_{G_{xz}} R\big(x,y(x,z),z\big)\,dzdx,$$

где G_{xz} – проекция G на плоскость Oxz; знак “+” берется в случае, если $\beta < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\beta > \dfrac{\pi}{2}$ (β угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oy).

Тогда

$$\iint_{\Omega} Pdxdz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint_{G_{yz}} Pdydz \pm \iint_{G_{xz}} Qdzdx \pm \iint_{G_{xy}} Rdxdy$$

13.4 Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода

Общий поверхностный интеграл 2-го рода и поверхностный интеграл 1-го рода связаны соотношением:

$$\iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iint_{\Omega} \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\big)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ координаты единичного вектора $\vec{n}$ нормали к поверхности Ω.

Координаты вектора $\vec{n}$ определяются заданием поверхности Ω (таблица 3. 2).

Таблица 3. 2 – Координаты вектора $\vec{n}$ в зависимости от задания поверхности Ω

Вид задания поверхности Ω	Угол между вектором нормали $\vec{n}$ и соответствующей координатной осью	Координаты вектора нормали
$z=z(x;y)$	$\gamma<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\left(-\frac{z_x'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}};-\frac{z_y'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}};1\right)$
$x=x(y,z)$	$\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\left(1;-\frac{x_y'}{\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}};-\frac{x_z'}{\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}}\right)$
$y=y(x,z)$	$\beta<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\left(-\frac{y_x'}{\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}};1;-\frac{z_z'}{\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}}\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F_z'\neq 0$	$\gamma<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\frac{1}{F_z'}\left(F_x',F_y',F_z'\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F_y'\neq 0$	$\beta<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\frac{1}{F_y'}\left(F_x',F_y',F_z'\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F_x'\neq 0$	$\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\frac{1}{F_x'}\left(F_x',F_y',F_z'\right)$
$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$		$\vec{n}=\left(\left\|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right\|;\left\|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right\|;\left\|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right\|\right)$

Если угол $\gamma>\frac{\pi}{2}$ ($\alpha>\frac{\pi}{2}$, $\beta>\frac{\pi}{2}$), то вектор нормали равен ($-\vec{n}$).

Тема 14 Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса

14.1 Формула Остроградского-Гаусса
14.2 Формула Стокса

14.1 Формула Остроградского-Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностными интегралами 2-го рода по замкнутой поверхности и тройными интегралами по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 1 Пусть

1) Q – элементарная относительно оси Oz замкнутая область, ограниченная поверхностью Ω;

2) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Q.

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iiint_{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz .$$

Формула Остроградского-Гаусса справедлива для любой области Q, которую можно разбить на конечное число элементарных областей. Также формулу Остроградского-Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов 2-го рода по замкнутым поверхностям.

Для вычисления объема тела, ограниченного замкнутой поверхностью Ω, используется формула:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy .$$

14.2 Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными интегралами и криволинейными интегралами.

Теорема 2 Пусть

1) Ω – элементарная относительно оси Oz поверхность, заданная уравнением $z = z(x;y)$, где функции $z(x;y)$, $z_x(x;y)$, $z_y(x;y)$ – непрерывны в замкнутой области G, проекции Ω на Oxy;

2) Γ – контур, ограничивающий область Ω, Γ_1 – его проекция на плоскость Oxy, являющаяся контуром, ограничивающим область G;

3) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на выбранной стороне поверхности Ω.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx .$$

С л е д с т в и е. Если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \text{ то}$$

1) $\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

2) подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(z;y;z)$, для которой:

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU .$$

Формула Стокса справедлива для любой области, которую можно разбить на конечное число элементарных областей указанного вида.

Учитывая, что

$$\cos\gamma\, dS = dxdy, \ \cos\beta\, dS = dzdx, \ \cos\alpha\, dS = dydz,$$

формулу Стокса можно записать в виде:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right] dS.$$

Данную формулу легко запомнить, используя для подынтегрального выражения определитель:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Тема 15 Скалярные поля

15.1 Понятие о задачах векторного анализа и теории поля
15.2 Определение скалярного поля
15.3 Производная по направлению
15.4 Градиент скалярного поля

15.1 Понятие о задачах векторного анализа и теории поля

При изучении многих процессов и явлений рассматриваются величины, значения которых определяются выбранной точкой пространства и моментом времени. Если такая величина принимает числовые значения, то, с математической точки зрения, задана скалярная функция точки и времени, если векторные – векторная функция точки и времени

$$U = U(P,t),\ \vec{a} = \vec{a}(P,t),\ P \in Q \subset \mathbb{R}^3,\ t \in [t_0;t_1].$$

Раздел математики, в котором изучаются функции вида $U = U(P,t)$, называют *векторным анализом*. В физике, электротехнике, теориях тепло- и массопереноса, упругости и пластичности методы векторного анализа используются для изучения *скалярных* и *векторных полей*, которые рассматриваются в качестве математических моделей конкретных процессов и явлений. Если процесс не зависит от времени (*стационарный*), то характеризующая его функция U не зависит от параметра t.

15.2 Определение скалярного поля

Стационарным скалярным полем называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ которого определена скалярная функция

$$U(P) = U(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Функция $U(P)$ независимо от ее физического смысла называется *потенциалом* скалярного поля.

Скалярными полями являются поле температур тела, поле плотности заряда на поверхности или в среде, поле плотности масс тела и другие.

Основными характеристиками скалярного поля являются: поверхности (линии) уровня, производная по направлению и градиент.

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек, в каждой из которых его потенциал $U(P)$ сохраняет постоянное значение.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнение поверхности уровня (*эквипотенциальной поверхности*) записывается в виде

$$U(x_1, x_2, x_3) = C,$$

где постоянная величина C принимает такие значения, при которых данное равенство имеет геометрический смысл.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривают *линии уровня*, уравнения которых имеют вид

$$U(x_1, x_2) = C.$$

15.3 Производная по направлению

Пусть в области Q задано скалярное поле $U(P)$. Рассмотрим точку $P_0 \in Q$ и какое-либо фиксированное направление, определяемое единичным вектором $\vec{\tau}$. Через точку P_0 проведем прямую l, параллельную вектору $\vec{\tau}$, и выберем на ней точку P (рисунок 3.20).

Рисунок 3.20 – Изменение потенциального поля $U(P)$ в направлении $\vec{\tau}$

Производной по направлению вектора $\vec{\tau}$ функции $U(P)$ в точке P_0 называется предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta U = U(P) - U(P_0)$ к величине перемещения

$|P_0P|$ при $|P_0P| \to 0$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \lim_{|P_0P| \to 0} \frac{\Delta U}{|P_0P|}.$$

Величина $\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ характеризует скорость изменения скалярного поля $U(P)$ в точке P_0 по выбранному направлению $\vec{\tau}$. Если $\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} > 0$, то скалярное поле в точке P_0 возрастает, в противном случае – убывает.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ вектор $\vec{\tau}$ имеет координаты

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы (рисунок 3.21).

Тогда производная по направлению $\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ выражается через декартовы координаты:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

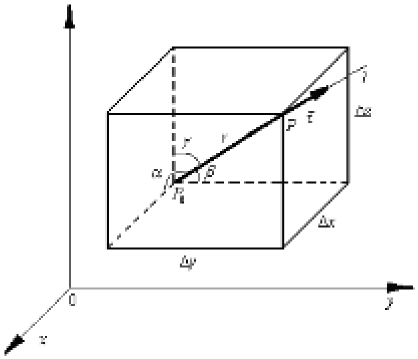

Рисунок 3.21 – Единичный вектор $\vec{\tau}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$

15.4 Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля $U(P)$ называется вектор $\mathrm{grad}U(P_0)$, проекциями которого на оси Ox, Oy, Oz являются соответствующие частные производные функции $U(P)$:

$$\operatorname{grad}U(P_0)=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\left|\operatorname{grad}U\right|\cdot\cos\left(\operatorname{grad}U;\vec{\tau}\right).$$

Отсюда следует, что величина $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ достигает наибольшего значения при $\cos\left(\operatorname{grad}U;\vec{\tau}\right)=1$. Поэтому направление градиента является направлением наибыстрейшего возрастания скалярного поля в точке.

Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial l_{\max}}=\left|\operatorname{grad}U\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\ ,$$

то модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания потенциала скалярного поля $U(P)$ в точке.

Тема 16 Векторные поля

16.1 Определение векторного поля

Стационарным векторным полем называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке M которого определена векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ векторная функция $\vec{a}(M)$, $M(x;y;z)$, определяется проекциями $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ вектора $\vec{a}(M)$ соответственно на координатные оси Ox, Oy, Oz:

$$\vec{a}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}\ .$$

Будем считать, что $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат точки M. Тогда векторная функция $\vec{a}(M)$ называется *непрерывно дифференцируемой в области* Q.

Векторными полями являются:

– электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности;

– магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции;

– поле тяготения, создаваемое системой масс, характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения;

– поле скоростей потока жидкостей, описываемое в каждой точке вектором скорости.

Основными характеристиками векторного поля являются: векторные линии, поток, дивергенция, циркуляция и вихрь.

Векторной (силовой) линией Γ векторного поля $\vec{a}(M)$ называется линия, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии.

Векторными линиями в движущейся жидкости являются линии скоростей, в электростатическом поле – силовые линии, в магнитном поле – линии, соединяющие северный и южный полюсы, в поле $\mathrm{grad}U$ – линии, ортогональные к эквипотенциальным поверхностям скалярного поля $U(M)$.

Пусть векторная линия Γ задана уравнением

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Тогда вектор $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ в каждой точке направлен по касательной к линии Γ и потому коллинеарен вектору $\vec{a}(M)$. Следовательно, координаты векторов $d\vec{r}$ и $\vec{a}(M)$ пропорциональны:

$$\frac{dx}{X(x;y;z)} = \frac{dx}{Y(x,y,z)} = \frac{dx}{Z(x,y,z)}.$$

Данная система дифференциальных уравнений определяет векторные линии поля $\vec{a}(M)$. Общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = c_1, \\ \varphi_2(x,y,z) = c_2. \end{cases}$$

С *геометрической* точки зрения данная система задает два семейства поверхностей, которые в совокупности определяют искомые векторные линии.

Если в некоторой области Q для системы уравнений выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то через каждую точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases}\varphi_1\left(x,y,z\right)=\varphi_1\left(x_0,y_0,z_0\right),\\ \varphi_2\left(x,y,z\right)=\varphi_2\left(x_0,y_0,z_0\right).\end{cases}$$

Пусть $\vec{a}\left(M\right)$ векторное поле в некоторой области Q и $\Omega\subset Q$ – двусторонняя гладкая незамкнутая ориентированная поверхность.

16.2 Поток векторного поля

Потоком Π векторного поля $\vec{a}\left(M\right)$ через ориентированную поверхность Ω называется число, равное значению поверхностного интеграла 2-го рода:

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS\,.$$

Поток Π зависит от выбора стороны поверхности (направления вектора $\vec{n}$) и обладает всеми свойствами поверхностного интеграла 2-го рода.

Поток Π векторного поля $\vec{a}\left(M\right)$ через замкнутую поверхность Ω равен сумме потоков по внешней и внутренней сторонам этой поверхности:

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega^{+}}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS+\iint\limits_{\Omega^{-}}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS\,.$$

Термин «поток» для введенной скалярной характеристики векторного поля употребляется независимо от физического смысла $\vec{a}\left(M\right)$. В частности, он определяет поле линейных скоростей стационарно движущейся несжимаемой жидкости через область Q, ограниченную поверхностью Ω. Если $\Pi>0$, то жидкости вытекает больше, чем поступает, следовательно, внутри области Q имеются *источники*. Если $\Pi<0$, то внутри области Q имеются *стоки*, так как вытекает меньше жидкости, чем поступает.

16.3 Дивергенция векторного поля

Дивергенцией (*расходимостью*) $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется скалярная функция, равная

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial X(M)}{\partial x} + \frac{\partial Y(M)}{\partial y} + \frac{\partial Z(M)}{\partial z}.$$

Дивергенция характеризует мощность находящегося в точке M источника при $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$ или стока при $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни источника, ни стока.

Теорема 1 (Остроградского - Гаусса) Если векторная функция $\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируема в области Q, ограниченной замкнутой поверхностью Ω, то поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность Ω в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области Q от дивергенции этого векторного поля:

$$\oiint\limits_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint\limits_{Q} \operatorname{div}\vec{a}\; dxdydz.$$

Данная теорема является аналитическим выражением *теоремы Остроградского - Гаусса в векторной форме*.

Рассмотрим область $Q \subset \mathbb{R}^3$, ориентированную линию Γ и векторное поле $\vec{a}(M)$, определенное на Γ. И пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к дуге Γ.

16.4 Циркуляция и ротор векторного поля

Циркуляцией C векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой Γ называется число, равное значению криволинейного интеграла 1-го рода:

$$C = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\, dl.$$

Циркуляция обладает всеми свойствами криволинейного интеграла 1-го рода.

Поместим в поток круглую пластинку с лопастями, расположенными по ее ободу – окружности Γ (рисунок 3.22).

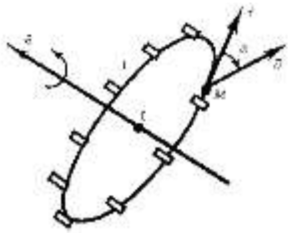

Рисунок 3.22 – Физический смысл циркуляции

Абсолютная величина циркуляции определяет угловую скорость $\vec{\omega}$ вращения пластинки вокруг оси, проходящей через центр окружности Γ. Знак циркуляции показывает, в какую сторону осуществляется вращение относительно ориентации линии Γ.

Локальной векторной характеристикой векторного поля, связанной с его вращательной способностью, является ротор (вихрь).

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M_0 называется векторная функция

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Символическая форма записи $\operatorname{rot}\vec{a}$ имеет вид:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Т е о р е м а 2 (С т о к с а) *Циркуляция C непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутому положительно-ориентированному контуру Γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность Ω, опирающуюся на Γ:*

$$\oint_{\Gamma}(\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl = \iint_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS.$$

Тема 17 Специальные виды векторных полей

17.1 Потенциальное векторное поле
17.2 Соленоидальное векторное поле
17.3 Гармоническое поле

17.1 Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным (безвихревым),* если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$, что $\vec{a} = \mathrm{grad}U(M)$. Функция $U(M)$ называется в этом случае *потенциалом* векторного поля $\vec{a}(M)$.

Потенциальное поле является наиболее простым среди векторных полей, так как оно определяется одной скалярной функцией $U(M)$ независимо от размерности пространства, в котором задано векторное поле.

Например, в пространстве $\mathbb{R}^3$ для потенциального векторного поля

$$\vec{a}(M) = X(x,y,z)\cdot\vec{i} + Y(x,y,z)\cdot\vec{j} + Z(x,y,z)\cdot\vec{k},$$

выполняется равенство

$$\vec{a}(M) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Свойства потенциальных векторных полей:

– если векторное поле $\vec{a}(M)$, потенциально, то его потенциал $U(M)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого;

– если векторное поле $\vec{a}(M)$ задано в односвязной области Q, то необходимым и достаточным условием его потенциальности является обращение в нуль ротора поля в любой точке M:

$$\mathrm{rot}\,\vec{a}(M) = 0.$$

Примером потенциального поля является поле тяготения.

17.2 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным (трубчатым),* если в любой точке M дивергенция равна 0:

$$\mathrm{div}\vec{a}(\mathrm{M})=0.$$

Свойства соленоидальных полей:

– соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков;

– из формулы Остроградского – Гаусса следует, что если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность Ω равен нулю;

– (*принцип сохранения интенсивности векторной трубки*) потоки соленоидального векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой;

– в соленоидальном векторном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться внутри поля. Они либо замкнуты, либо начинаются и оканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля);

– в односвязной области в случае соленоидального векторного поля поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность Ω, опирающуюся на замкнутый контур Γ, зависит не от вида этой поверхности, а только от самого контура Γ.

Примером соленоидального поля является магнитное поле, создаваемое током в проводнике.

17.3 Гармоническое поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *гармоническим (лапласовым),* если оно является как потенциальным, так и соленоидальным.

Гармоническое векторное поле описывается скалярной функцией $U(M)$, которая является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией.*

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Что называется интегральной суммой для функции $f(x;y)$, определенной на кривой AB?

2 Дайте определение криволинейного интеграла 1-го рода.

3 Сформулируйте определения: а) интегральных сумм для криволинейного интеграла 2-го рода; б) криволинейного интеграла 2-го рода.

4 Какие множества называются клетками в $\mathbb{R}^n$?

5 Что называется клеточным множеством в $\mathbb{R}^n$?

6 Какие множества называются измеримыми по Жордану?

7 Что такое мера Жордана?

8 Что такое разбиение множества, и какими свойствами оно обладает?

9 Что называется интегральной суммой функции $f(x;y)$?

10 Какие суммы называются верхней и нижней суммой Дарбу функции $f(x;y)$?

11 Дайте определение двойного интеграла.

12 Какие координаты называются криволинейными?

13 Какая область называется односвязной?

14 Дайте определения: а) интегральной суммы, б) нижней и верхней сумм Дарбу для тройного интеграла.

15 Что называется тройным интегралом?

16 Дайте определение поверхностного интеграла 1-го рода.

17 Дайте определение поверхностного интеграла 2-го рода.

18 Что называется поверхностью?

19 Какие поверхности называются простыми? Что называется границе поверхности, внутренней точкой поверхности?

20 Какие поверхности называются замкнутыми? Дайте определение особых и неособых точек поверхности.

21 Какая поверхность называется гладкой, кусочно-гладкой?

22 Какая плоскость называется касательной к поверхности?

23 Дайте определение нормального вектора к поверхности.

24 Дайте определение внешней и внутренней нормалей к поверхности, односторонней и двусторонней поверхности.

25 Какое поле называется скалярным? Приведите примеры скалярных полей.

26 Что называется поверхностью уровня скалярного поля?

27 Что называется производной по направлению?

28 Что называется градиентом скалярного поля?

29 Какое поле называется стационарным векторным полем? Приведите примеры стационарных векторных полей.

30 Дайте определение векторной линии.

31 Что называется потоком векторного поля? В чем состоит его физический смысл?

32 Что называется дивергенцией векторного поля? В чем состоит физический смысл дивергенции?

33 Что называется циркуляцией векторного поля и в чем состоит ее физический смысл?

34 Что называется ротором векторного поля?

35 Какое поле называется потенциальным? Перечислите свойства потенциальных полей.

36 Какое поле называется соленоидальным? Перечислите свойства соленоидальных полей.

37 Какое поле называется гармоническим?

Формулировки теорем и формулы

1 Перечислите свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

2 Как вычисляется криволинейный интеграл 1-го рода в следующих случаях задания плоской кривой: а) в параметрическом виде; б) в полярных координатах; в) в явном виде?

3 Перечислите геометрические и физические приложения криволинейного интеграла 1-го рода?

4 Перечислите основные свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

5 Как вычисляется криволинейный интеграл 2-го рода в случаях: а) параметрического задания; б) явного задания кривой интегрирования?

6 Перечислите свойства клеток в пространстве $\mathbb{R}^n$.

7 Перечислите свойства клеточных множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$.

8 Сформулируйте критерий измеримости множества в $\mathbb{R}^n$.

9 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции двух переменных.

10 В чем суть критерия интегрируемости?

11 Перечислите свойства двойного интеграла.

12 Чему равен якобиан при переходе от декартовых координат к полярным?

13 Какие геометрические приложения имеет двойной интеграл?

14 Перечислите, при вычислении каких физических величин используется двойной интеграл.

15 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x;y;z)$.

16 Перечислите свойства тройного интеграла.

17 Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному.

18 Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

19 Какие координаты называются цилиндрическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим?

20 Какие координаты называются сферическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к сферическим?

21 При вычислении каких величин используется тройной интеграл?

22 Перечислите свойства поверхностного интеграла 1-го рода.

23 Как вычисляется поверхностный интеграл 1-го рода в случаях: а) параметрического, б) явного, в) неявного заданий поверхности?

24 Для вычисления каких величин используется поверхностный интеграл 1-го рода?

25 Перечислите свойства поверхностного интеграла 2-го рода.

26 Как вычисляется поверхностный интеграл 2-го рода?

27 Какой формулой выражается связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода?

28 Какие координаты имеет нормальный вектор при векторном задании поверхности, при явном задании поверхности?

29 Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной: а) в векторной форме; б) параметрическими уравнениями; в) в явном виде.

30 Запишите уравнение нормали к поверхности, заданной: а) в векторной форме; б) параметрическими уравнениями; в) в явном виде.

31 Какое выражение называется первой квадратичной формы поверхности?

32 Как определяется площадь поверхности через двойной интеграл?

33 Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла 1-го рода при условии, что поверхность Ω задана: а) параметрическими уравнениями; б) явном виде; в) неявно.

34 Как вычисляется поверхностный интеграл 2-го рода?

35 Запишите формулу связи поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.

36 Сформулируйте теорему Остроградского - Гаусса в векторной форме.

37 Сформулируйте теорему Стокса в векторной форме.

Доказательства теорем

1 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую связь между криволинейными интегралами 1 и 2-го рода.

2 Сформулируйте теорему и докажите о вычислении двойного интеграла в случае прямоугольной области.

3 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении двойного интеграла в случае произвольной области.

4 Сформулируйте и докажите теорему о замене переменных в двойном интеграле.

5 Доказать формулу Грина.

6 Сформулировать и доказать теорему о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

7 Сформулируйте и докажите теорему Остроградского-Гаусса.

8 Сформулируйте и докажите теорему Стокса.

Вопросы и задачи на понимание

1 Назовите общие и различные между свойствами криволинейного интеграла 1-го рода и определенного интеграла?

2 Как вычислить двойной интеграл по области, не являющейся элементарной?

3 Назовите способы задания поверхности. Для каждого способа задания приведите пример.

4 Приведите пример замкнутой поверхности.

5 Приведите примеры двусторонних и односторонних поверхностей.

6 Запишите формулы для вычисления поверхностного интеграла 2-го рода, в случае, когда поверхность задана: а) параметрическими уравнениями; б) явном виде $z = z(x, y)$, $y = y(x, z)$, $x = x(y, z)$; в) неявно.

Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра

Тема 1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

1.1 Определение собственного интеграла, зависящего от параметра
1.2 Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

1.1 Определение собственного интеграла, зависящего от параметра

Пусть на множестве $Y \subset \mathbb{R}$ определены функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$, причем $\varphi(y) \le \psi(y)$. И пусть на множестве

$$Q = \left\{ (x;y) \middle| \varphi(y) \le x \le \psi(y),\, y \in Y \right\}$$

определена функция $f(x;y)$, которая при любом значении параметра $y \in Y$ интегрируема по Риману. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ представляет собой функцию параметра y, определенную на множестве Y.

Собственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx,$$

переменная y называется *параметром*.

В частности, если $\varphi(y) = a$ и $\psi(y) = b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то собственный интеграл, зависящий от параметра y примет вид

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx.$$

1.2 Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть $Y = [c;d] \subset \mathbb{R}$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[c;d]$. Рассмотрим область $\overline{G}$, образованную графиками функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$

$$\bar{G}=\left\{\left(x;y\right)\middle|\varphi\left(y\right)\le x\le\psi\left(y\right),-\infty<c\le y\le d<\infty\right\},$$

которая является областью определения функции $\Phi\left(y\right)$.

Теорема 1 (непрерывность) Пусть

1) функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$, причем $\varphi(y)\le\psi(y)$,

2) функция $f(x;y)$ непрерывна на множестве $\bar{G}$.

Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ есть непрерывная на $[c;d]$ функция и справедлива формула

$$\lim_{\lambda\to0}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx=\int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)}\lim_{y\to y_0} f(x;y)dx.$$

Теорема 2 (дифференцирование по параметру) Пусть 1) функции $f(x;y)$ и $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике $\Pi=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b,c\le y\le d\right\}$ и $\bar{G}\subset\Pi$; *2) функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[c;d]$. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ является дифференцируемой функцией на $[c;d]$ и справедлива формула*

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx\right)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx+f(\psi(y);y)\psi'(y)-f(\varphi(y);y)\varphi'(y).$$

Теорема 3 (интегрирование по параметру) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на прямоугольнике Π.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ является интегрируемой функцией и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy.$$

Тема 2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

2.1 Определение несобственных интегралов, зависящих от параметра
2.2 Поточечная и равномерная сходимость
2.3 Признаки равномерной сходимости
2.4 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

2.1 Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x;y)$ определена на множестве

$$\Pi_{\infty}=\left\{ (x;y) \middle| -\infty < a \le x \le b \le +\infty ,\, y \in Y \right\}.$$

И пусть функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ удовлетворяет условиям:

1) $-\infty < a < b \le +\infty$ (b может быть конечным или бесконечным);

2) для любого $y \in Y$ функция $f(x;y)$ интегрируема по переменной x на каждом отрезке $[a;\eta]$, где $a<\eta<b\le+\infty$.

Если b *конечно*, то $\lim\limits_{\eta\to b-0}\int\limits_a^{\eta} f(x;y)\,dx$ есть несобственный интеграл от неограниченной функции; если b *бесконечно*, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx$ есть несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $b=+\infty$.

Несобственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx,$$

где переменная y называется *параметром*.

Аналогично определяются следующие несобственные интегралы, зависящие от параметра y:

$$\Phi(y)=\int_{-\infty}^{b} f(x;y)\,dx\,,\ \Phi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)\,dx\,.$$

2.2 Поточечная и равномерная сходимость

Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, $\int_a^b f(x;y)\,dx$ называется *сходящимся (поточечно)*, если $\forall\ y\in Y$ и $b\le+\infty$ существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to b-0}\int_a^{\eta} f(x;y)\,dx$:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_a^{\eta} f\,dx=\int_a^b f\,dx \Leftrightarrow \forall\ y\in Y\ \ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ \ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\int_a^b f(x;y)\,dx-\int_a^{\eta} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon\,.$$

Поточечная сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x;y)\,dx$, зависящего от параметра y определяет сходимость его при каждом фиксированном $y\in Y$ как несобственного.

Поскольку

$$\int_a^b f(x;y)\,dx=\int_a^{\eta} f(x;y)\,dx+\int_{\eta}^b f(x;y)\,dx\,,$$

то для сходящегося интеграла справедливо равенство

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^b f(x;y)\,dx=0\,.$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)\,dx$ называется *равномерно сходящимся по параметру* y *на множестве* Y, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $b'(y;\varepsilon)>0$, $a\le b'<b$, что для всех $y\in Y$ и всех η, $b'<\eta<b$, выполняется неравенство $\left|\int_{b'}^b f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon$:

$$\int_a^\eta f\,dx \underset{\eta\to b}{\overset{\to}{\to}} \int_a^b f\,dx \;\Leftrightarrow\; \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ y\in Y \text{ и } \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{b'}^{b} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon\,.$$

Обозначим $\Phi(y;\eta)=\int_a^\eta f(x;y)\,dx$, где $a<\eta<b\le+\infty$. Тогда интеграл $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)\,dx$ равномерно сходится, когда $\Phi(y;\eta)\overset{\to}{\underset{\to}{}}\Phi(y)$ при $\eta\to b$.

Теорема 1 (критерий Коши) Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *сходился равномерно по параметру* y *на множестве* $Y\in\mathbb{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ *такое, что* $\forall\ \eta,\eta'\in[b';b)$ *и* $\forall\ y\in Y$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{\eta}^{\eta'} f(x;y)\,dx\right|<0\,.$$

Следствие. Если $\exists\varepsilon_0>0$ *такое, что* $\forall b'\in[a,b)$ $\exists\eta_0,\eta_0'\in[b';b)$ *и* $\exists y_0\in Y$ *такие, что*

$$\left|\int_{\eta_0}^{\eta_0'} f(x;y)\,dx\right|\ge\varepsilon_0\,,$$

то интеграл $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *не сходится равномерно по параметру* y *на множестве* Y.

2.3 Признаки равномерной сходимости

Теорема 2 (Вейерштрасса) Пусть существует функция $g(x)\ge 0$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $g(x)$ *определена на* $[a;b)$ *и интегрируема на* $[a;\eta]$, $a<\eta<b\le+\infty$*;*

2) $\left|f(x;y)\right| \le g(x)$ *для* $\forall x \in [a;b)$ *и* $\forall y \in Y$ *;*

3) $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходится.*

Тогда интеграл $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *сходится абсолютно и равномерно на* Y *.*

Пусть интеграл $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)\,dx$ (равномерно) сходится на множестве Y. И пусть последовательность (η_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, $a \le \eta_n < b$, $\eta_0 = a$, сходится к b. Тогда последовательность функций $\Phi_n(y) = \int_a^{\eta_n} f(x;y)\,dx$ (равномерно) сходится на множестве Y к функции $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)\,dx$.

Т е о р е м а 3 (Д и р и х л е) Пусть

1) $\forall y \in Y$ *функции* $f(x;y)$, $g(x;y)$ *и* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны как функции* x *на полуинтервале* $[a;+\infty)$ *;*

2) функция $F(x;y)$, *являющаяся при любом* $y \in Y$ *первообразной по* x *функции* $f(x;y)$, *ограничена при* $y \in Y$, $x \in [a;+\infty)$ *;*

3) $\frac{\partial g}{\partial x} \le 0$ *при* $y \in Y$ *, и* $x \in [a;+\infty)$ *;*

4) существует непрерывная на $[a;+\infty)$ *функция* $\psi(x)$ *такая, что* $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$ *и* $\left|g(x;y)\right| \le \psi(x)$ *для* $y \in Y$ *и* $x \in [a;+\infty)$.

Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x;y)\,g(x;y)\,dx$$

сходится равномерно по параметру y *на множестве* Y *.*

2.4 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 4 (непрерывность) Пусть функция $f(x;y)$ *непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике*

$$\Pi_{\infty}=\left\{(x;y)\middle|-\infty<a\le x\le b\le+\infty,\, c\le y\le d\right\},$$

а интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ *равномерно сходится по параметру* y *на отрезке* $[c;d]$. *Тогда интеграл* $\int_a^b f(x;y)dx$ *является непрерывной функцией переменной* y *на отрезке* $[c;d]$ *и справедлива формула*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x;y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x;y)dx.$$

Теорема 5 (интегрирование по параметру) Пусть функция $f(x;y)$ *непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике* Π_{∞}, *а интеграл* $\int_a^b f(x;y)dx$ *сходится равномерно по параметру* y *на отрезке* $[c;d]$. *Тогда функция* $\int_a^b f(x;y)dx$ *является интегрируемой на* Π_{∞} *и существует интеграл* $\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx$.

Теорема 6 (о перестановке порядка интегрирования) Пусть функция $f(x;y)$ *непрерывна на множестве* Π_{∞} *и выполнены следующие условия:*

1) несобственный интеграл $\int_a^b \left|f(x;y)\right|dx$ *сходится равномерно по параметру* y *на любом отрезке* $[c';d']\subset(c;d)$;

2) несобственный интеграл $\int_c^d \left|f(x;y)\right|dy$ *сходится равномерно по параметру* x *на любом отрезке* $[a';b']\subset(a;b)$;

3) один из двух повторных интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^b \left| f(x;y) \right| dx, \ \int_a^b dx \int_c^d \left| f(x;y) \right| dy$$

сходится. Тогда сходятся оба повторных интеграла $\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)\,dx$, $\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)\,dy$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)\,dx.$$

Т е о р е м а 7 (д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е п о п а р а м е т р у) Пусть функции $f(x;y)$ *и* $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ *непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике* Π_∞, *а интеграл* $\int_a^b \dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}\,dx$ *равномерно сходится на отрезке* $[c;d]$. *Тогда интеграл* $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *является дифференцируемой на отрезке* $[c;d]$ *функцией и справедливо равенство*

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x;y)\,dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\,dx.$$

Тема 3 Интегралы Эйлера

3.1 Определение гамма функции
3.2 Свойства гамма функции
3.3 Определение бета функции
3.4 Свойства бета функции

3.1 Определение гамма функции

Функция

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx, \quad s > 0,$$

называется *гамма-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

3.2 Свойства гамма функции

Гамма-функция обладает следующими свойствами:

– гамма-функция является непрерывной функцией переменной s;

– $\Gamma(s) > 0$;

– $\Gamma(1) = 1$;

– $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$;

– (*формула понижения*) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$;

– $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$;

– гамма-функция имеет непрерывные производные любого порядка k, $k \in \mathbb{N}$, и справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} (\ln x)^k \, dx;$$

– *(интеграл Пуассона)* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$;

– (*формула дополнения*) если $0 < p < 1$, то

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p};$$

– (*формула Стирлинга*) при $s \to +\infty$ справедливо

$$\Gamma(s+1) \approx \sqrt{2\pi s} \cdot \left(\frac{s}{e}\right)^s.$$

3.3 Определение бета функции

Функция

$$\mathrm{B}(p;q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, \qquad p > 0, \qquad q > 0$$

называется *бета-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

3.4 Свойства бета функции

Бета-функция обладает следующими *свойствами*:

– бета-функция является непрерывной функцией и обладает частными производными любого порядка;

– $\mathrm{B}(p;q)=\mathrm{B}(q;p)$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1)$, $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1;q)$;

– $\mathrm{B}(p;1)=\dfrac{1}{p}$;

– $\mathrm{B}(p;n)=\mathrm{B}(n;p)=\dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{p\cdot(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}\quad\forall\ \ n\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(m;n)=\dfrac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}\quad\forall\ \ n,m\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$;

– $\mathrm{B}(p;1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p}$;

– (*связь гамма- и бета- функций*) $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Тема 4 Интеграл Фурье

4.1 Представление функций интегралом Фурье
4.2 Преобразование Фурье
4.3 Синус и косинус преобразования Фурье
4.4 Свойства преобразования Фурье

4.1 Представление функций интегралом Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке действительной оси $\mathbb{R}$. *Интегралом в смысле главного значения* называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b>0.$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

при произвольных a и b, а интеграл в смысле главного значения есть предел того же интеграла, но при $a=b$.

Очевидно, что, если существует несобственный интеграл, то и существует интеграл в смысле главного значения. Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения может существовать, а несобственный интеграл – нет.

Рассмотрим множество $L^1(-\infty;\infty)$ кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$.

4.2 Преобразование Фурье

Интегралом Фурье функции $f(x)$ называется функция вида

$$\hat{f}(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx .$$

Поскольку

$$\left| f(x) e^{-iyx} \right| = \left| f(x) \right| \cdot \left| e^{-iyx} \right| = \left| f(x) \right| \cdot \left| \cos yx - i \sin yx \right| =$$

$$= \left| f(x) \right| \cdot \sqrt{\cos^2 yx + \sin^2 yx} = \left| f(x) \right|$$

и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$, то на основании признака сравнения несобственных интегралов, данный интеграл сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

Отображение F, ставящее в соответствие функции $f(x)$ функцию $\hat{f}(y)$, называется *преобразованием Фурье* и обозначается

$$F[f](y) = \hat{f}(y).$$

Отображение F^{-1}, ставящее в соответствие функции $\hat{f}(y)$ функцию $f(x)$ по формуле

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{iyx} dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается

$$F^{-1}[f](y) = f(x).$$

Функция $F[f]$ называется *образом Фурье* функции $f(x)$.

Теорема 11 (формула обращения) Если функция $f(x) \in L^1$ и существуют правая $f_-^{'}(x)$ и левая $f_+^{'}(x)$ производные, то справедлива формула

$$F^{-1}\left[F[f]\right] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f .$$

Формула обращения может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) e^{iyx} dy$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(x-t)y} dt .$$

4.3 Синус и косинус преобразования Фурье

Интеграл Фурье можно записать в виде

$$F[f](y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos yx dx - v.p. \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin yx dx .$$

Обратное преобразование Фурье примет вид

$$F^{-1}[f](x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y) \cos yx dy + v.p. \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y) \sin yx dy .$$

Косинус-преобразованием Фурье называется действительная часть преобразования Фурье:

$$F_c[f](y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos yx \, dx .$$

Синус-преобразованием Фурье называется мнимая часть преобразования Фурье:

$$F_s[f](y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin yx \, dx .$$

Очевидно, что $F[f] = F_c[f] - iF_s[f]$.

Если $f(x)$ – четная функция, то функция $f(x)\sin yx$ – нечетная функция. Тогда $F_s[f](y) = 0$ и

$$F[f](y) = F_c[f](y),$$

при этом

$$F_c[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos yx\,dx,$$

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\cos yxdy = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F_c(y)\cos yxdy.$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то функция $f(x)\cos yx$ – четная функция. Тогда $F_c[f](y) = 0$ и

$$F[f](y) = -iF_s[f](y),$$

при этом

$$F_s[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin yx\,dx,$$

$$f(x) = v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yxdx = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F_s(y)\sin yxdx.$$

4.4 Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье обладает *свойствами:*

– (*линейность*) $F[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot F[f] + \beta \cdot F[g]$,

$$F^{-1}[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot F^{-1}[f] + \beta \cdot F^{-1}[g];$$

– (*преобразование Фурье от сдвига*)

$$F[f(x-a)] = e^{iay} \cdot F[f];$$

– (*преобразование Фурье от производной*) если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, то

$$F[f'] = iy \cdot F[f];$$

– если функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$ принадлежат пространству $L^1(-\infty;\infty)$ и $f^{(n)}(x)$ – кусочно-непрерывна на любом отрезке, то

$$F\left[f^{(n)}\right] = (iy)^n \cdot F[f];$$

– пусть $f(x)$ и ее первообразная $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$, $f(x)$ – непрерывна, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. Тогда

$$F[g]=\frac{F[f]}{iy};$$

– (*дифференцирование преобразования Фурье*) пусть функции $f(x)$, $xf(x)$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$. Тогда функция $\hat{f}(y)=F[f](y)$ имеет на $(-\infty;+\infty)$ непрерывную производную, причем

$$\frac{d}{dy}(F[f])=F[(-ix)f];$$

– если $f(x)$ непрерывна, а функции $xf(x)$, $x^2 f(x)$, …, $x^n f(x)$ – абсолютно интегрируемы, то

$$\frac{d^n}{dy^n}(F[f])=F\left[(-ix)^n f\right];$$

– если $F[f]=F[g]$, то $f(x)=g(x)$;

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)\in L^1(-\infty;\infty)$. Функция (если несобственный интеграл сходится $\forall x\in\mathbb{R}$)

$$(f*g)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

называется *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 12 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то свертка $f*g$ есть непрерывная ограниченная и абсолютно интегрируемая функция на $\mathbb{R}$.

Теорема 13 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g].$$

Свертка обладает *свойствами*:

– (*коммутативность*) $f*g=g*f$;

– (*распределительный закон*) $(f+g)*h=f*h+g*h$;

– (*сочетательный закон*): $(f*g)*h = f*(g*h)$.

Тема 5 Обобщенные функции

5.1 Определение функции Дирака

Понятие обобщенной функции было вызвано не стремлением к обобщениям, а конкретными физическими задачами, когда обычных функций оказалось недостаточно для описания наблюдаемых явлений. Идею введения проиллюстрируем на следующем примере. Когда говорят о материальной точке массы 1, то это идеализированная модель шара достаточно малого радиуса ε и массы 1. Плотность такого шара есть единица, поделенная на объем шара. Если в пространстве нет других масс, то плотность материи в пространстве будет распределена по следующему закону:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \text{ при } |x| \le \varepsilon, \\ 0 \text{ при } |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}$.

При этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$.

Если $\varepsilon \to +0$, то предельная плотность $\delta(x)$ примет следующий вид:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty \text{ при } x = 0, \\ 0 \text{ при } x \ne 0. \end{cases}$$

По плотности $\delta(x)$ нельзя восстановить массу при помощи интегрирования, так как функция $\delta(x)$ не интегрируема ни по Риману, ни в несобственном смысле.

Будем рассматривать $\delta_\varepsilon(x)$ как несобственный интеграл, ставящий в соответствие каждой непрерывной в $\mathbb{R}$ функции $\varphi(x)$ число

$$(\delta_\varepsilon, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) \cdot \varphi(x)\, dx .$$

Применяя теорему о среднем, получим:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (\delta_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varphi(x_\varepsilon) = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$

где число δ соответствует непрерывной функции $\varphi(0)$.

Если для любой непрерывной функции выполнено данное равенство, то говорят, что δ есть *слабый предел* δ_ε при $\varepsilon \to +0$.

При таком подходе по плотности можно восстановить массу точки. Она равна

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \to +0} (\delta_\varepsilon, 1) = (\delta, 1) = 1 .$$

Выражение $(\delta_\varepsilon, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) \cdot \varphi(x) dx$ называется δ*-функцией Дирака*.

Носителем функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $\varphi(x) \neq 0$ и о*бозначается*:

$$\operatorname{supp} \varphi(x) = \overline{\{\, x \mid \varphi(x) \neq 0 \,\}} .$$

5.2 Финитные функции

Функция $\varphi(x)$ называется *финитной*, если она обращается в 0 вне некоторого отрезка.

Пусть D есть множество финитных и бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций. Очевидно, что D есть линейное пространство.

Будем говорить, что последовательность функций $(\varphi_n(x))$, $\varphi_n(x) \in D$, при любом $n \in \mathbb{N}$, *сходится* к функции $\varphi(x) \in D$, если выполнены следующие условия:

1) носители всех функций $\varphi_n(x)$, $\varphi(x) \in D$, лежат на некотором отрезке $[a;b]$:

$$\varphi_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a;b] \; n \in \mathbb{N},$$

2) при любом $k \in \mathbb{N}$ последовательность производных $\varphi_n^{(k)}(x)$ равномерно на $[a;b]$ сходится к $\varphi^{(k)}(x)$: $\varphi_n^{(k)}(x) \underset{\to}{\to} \varphi^{(k)}(x)$.

Обозначается: $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathbf{D}} \varphi(x)$ при $n \to \infty$.

5.3 Пространство обобщенных функций

Линейное пространство D с введенной выше сходимостью называется *пространством основных функций*.

Покажем, что функция

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, \text{ если } |x| < \varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

принадлежит пространству D.

Действительно, односторонние производные всех порядков справа и слева в точках $x = -\varepsilon$ и $x = \varepsilon$ равны нулю. Поэтому функция бесконечно дифференцируема на всей числовой оси. При этом $\varphi_\varepsilon(x)$ – финитная, так как $\mathrm{supp}\varphi_\varepsilon(x) = [-\varepsilon;\varepsilon]$. Значит, $\varphi_\varepsilon(x) \in D$. На рисунке 3.23 изображена данная функция при различных ε.

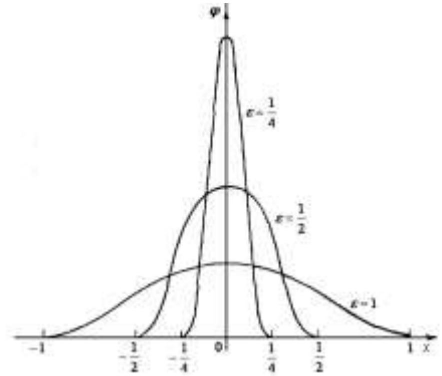

Рисунок 3.23 – График функции $\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, \text{ если } |x| < \varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$

Обобщенной функцией $f : D \to \mathbb{R}$ называется функция, для которой выполнены следующие условия:

1) каждой функции $\varphi \in D$ сопоставляется число (f, φ);

2) для любых двух чисел α, β и любых двух функций $\varphi(x)$, $\psi(x) \in D$ выполнено равенство

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi);$$

3) из $\varphi_n \xrightarrow{\mathbf{D}} \varphi$ при $n \to \infty$ следует, что

$$(f, \varphi_n) \xrightarrow{\mathbf{D}} (f, \varphi) \text{ при } n \to \infty.$$

Множество всех обобщенных функций обозначается через D'. Множество D' является линейным пространством, так как

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi) \quad \varphi \in D.$$

В пространстве D' выделяется класс *регулярных обобщенных функций*: функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке и справедливо равенство:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Обобщенные функции также называются *распределениями*, так как плотность $\rho(x)$ распределения вещества неизмерима никаким прибором и представляет собой интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\varphi(x)dx$.

Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*.

Например, δ -функция, определяемая по правилу

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0)$$

является сингулярной обобщенной функцией.

В самом деле, линейность и непрерывность очевидны. Докажем его сингулярность. Предположим, что она является регулярной обобщенной функцией. Тогда существует такая интегрируемая функция f , что

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\ \varphi\in D .$$

В частности, это равенство должно быть выполнено для функции $\varphi_\varepsilon(x)\in D$, определенной равенством

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, \text{ если } |x|<\varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x|\ge\varepsilon \end{cases}$$

при любом $\varepsilon>0$.

Поэтому

$$(\delta,\varphi_\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx=\varphi_\varepsilon(0)=\frac{1}{e} .$$

С другой стороны, подберем такое ε , что

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}|f(x)|dx<1 .$$

Поскольку $\varphi_\varepsilon(x)\le\varphi_\varepsilon(0)$, то получаем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right|=\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right|\le\varphi_\varepsilon(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}|f(x)|dx=\frac{1}{e} ,$$

что противоречит равенству $(\delta,\varphi_\varepsilon)=\dfrac{1}{e}$.

Противоречие доказывает, что δ -функция является сингулярной функцией.

Будем говорить, что последовательность (f_n), где $f_n\in D'$, *сходится* к $f\in D'$, если для любой функции $\forall\ \varphi\in D$ выполнено равенство

$$\left(f_n,\varphi\right)\to\left(f,\varphi\right) \text{ при } n\to\infty .$$

Обозначается: $f_n \xrightarrow{\mathbf{D'}} f$

Такая сходимость называется *слабой сходимостью*.

Пример. Докажем, что в пространстве D' $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Каждая функция из пространства основных функций D абсолютно дифференцируема на всей числовой оси. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin nx,\varphi\right)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\sin nx dx = 0 .$$

Иногда вместо последовательности обобщенных функций $f_n \in D'$ рассматриваются функции f_ε, зависящие от параметра ε. В этом случае запись $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{D'}} f$ при $\varepsilon\to+0$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(f_\varepsilon,\varphi\right)=\left(f,\varphi\right) \quad \forall\ \varphi\in D .$$

В частности, запись $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{D'}} \delta$ при $\varepsilon\to+0$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(f_\varepsilon,\varphi\right)=\left(\delta,\varphi\right)=\varphi(0) \quad \forall\ \varphi\in D .$$

Пример. Докажем, что $f_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\xrightarrow{\mathbf{D'}}\delta(x)$ при $\varepsilon\to+0$. Очевидно, что функции $f_\varepsilon(x)$ порождают регулярные функции в D'. Возьмем любую функцию $\varphi\in D$. Пусть ее носитель лежит на отрезке $[-A;a]$. Тогда

$$\left(f_\varepsilon,\varphi\right)=\int_{-A}^{+A} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)\right]dx .$$

Так как функция $\varphi(x)$ дифференцируема и финитна на $\mathbb{R}$, то, применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем неравенство:

$$\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right|=\left|x\varphi(\xi)\right|\le|x|\cdot\max_{x\in[-A;A]}=c_0|x| .$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}1 ,$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]}{x^2+\varepsilon^2}dx\right|\le\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{c_0\varepsilon|x|}{x^2+\varepsilon^2}dx=\frac{c_0\varepsilon}{\pi}\ln\frac{A^2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}0 ,$$

то получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi)\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)\right]dx=$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]}{x^2+\varepsilon^2}dx+\frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx\right)=\varphi(0)=(\delta,\varphi)\quad .$$

Согласно определению это означает, что $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\xrightarrow{\mathbf{D'}}\delta(x)$.

5.4 Операции над обобщенными функциями

Над обобщенными функциями справедливы следующие операции.

Операция *умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию* $\psi(x)$.

Если $f\in D'$, а $\psi(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, то $\psi\cdot f$ – такая обобщенная функция, которая действует на произвольную функцию $\varphi\in D$ по следующему правилу:

$$(\psi\cdot f,\varphi)=(f,\psi\cdot\varphi).$$

Данная операция линейна и непрерывна из D' в D'.

Пример. Покажем, что $x\delta=0$. В самом деле

$$(x\delta,\varphi)=(\delta,\varphi)=(x\varphi)(0)=0\cdot\varphi(0)=0\quad\forall\ \varphi\in D.$$

Производная обобщенной функции. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. И пусть $\forall\ \varphi\in D$ существует отрезок $[-A;A]$ такой, что

$$\operatorname{supp}\varphi(x)\subset[-A;A].$$

Отсюда $\varphi(-A)=\varphi(A)=0$.

Тогда

$$\left(f',\varphi\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)dx=\int_{-A}^{+A}f'(x)\varphi(x)dx=\begin{bmatrix}u=\varphi(x),dv=f'(x)dx,\\ du=\varphi'(x),v=f(x)\end{bmatrix}=$$

$$=f(x)\cdot\varphi(x)\Big|_{-A}^{A}-\int_{-A}^{+A}f(x)\varphi'(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)dx=-\left(f,\varphi'\right)\ .$$

Производной обобщенной функции $f\in D'$ называется обобщенная функция, определяемая формулой

$$\left(f',\varphi\right)=-\left(f,\varphi'\right)\quad \forall\ \varphi\in D.$$

Производные высших порядков определяются для обобщенных функций по индукции:

$$f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)',\ n=1,2,\dots .$$

Отсюда следует, что любая обобщенная функция f бесконечно дифференцируема, причем

$$\left(f^{(n)},\varphi\right)=(-1)^n\left(f,\varphi^{(n)}\right)\quad \forall\ \varphi\in D.$$

Пример. Найдем производную функции Хевисайда

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\ge 0,\\ 0 \text{ при } x<0.\end{cases}$$

При $x=0$ функция $\sigma(x)$ является разрывной. Поэтому она не имеет производной в обычном смысле. Однако $\sigma(x)$ является локально интегрируемой, и ее можно рассматривать как обобщенную функцию, действующую на основные функции по правилу

$$(\sigma,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)\varphi(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx.$$

По определению для любой функции $\varphi\in D$ имеем:

$$\left(\sigma',\varphi\right)=-\left(\sigma,\varphi'\right)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)\varphi'(x)dx=-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)dx=-\varphi(+\infty)+\varphi(0)=$$

$$=\varphi(0)=(\delta,\varphi).$$

Отсюда следует, что $\sigma'=\delta$.

Видно, что производная в обычном смысле может не совпадать с производной в смысле обобщенных функций.

Операция сдвига аргумента для обобщенных функций. Пусть $f(x)$ есть локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция. Для нее определена операция сдвига аргумента T_h по правилу

$$T_h f(x)=f(x-h).$$

Если $\varphi\in D$, то

$$(T_h f,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-h)\varphi(x)dx=\begin{bmatrix}t=x-h,\\ dx=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\varphi(x+h)dx=(f,T_{-h}\varphi).$$

Хотя значение обобщенной функции f в точке не определено, но для нее можно формально ввести операцию сдвига аргумента по аналогии с полученной формулой:

$$(T_h f, \varphi) = (f, T_{-h}\varphi).$$

При этом $T_h f \in D'$ при любом $h \in \mathbb{R}$.

Для функции Дирака $\delta(x)$ сдвиг $T_h\delta = \delta(x-h)$ и $\forall\ \varphi \in D$ есть

$$(\delta(x-h), \varphi) = (\delta, \varphi(x+h)) = \varphi(h).$$

Обобщенные функции используются при решении задач математической физики.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Дайте определение собственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Дайте определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.

3 Дайте определения: а) поточечной сходимости, б) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

4 Дайте определение гамма-функции.

5 Дайте определение бета-функции.

6 Дайте определение прямого и обратного преобразования Фурье.

7 Что называется сверткой функций?

8 Какие функции называются финитными?

9 Дайте определение пространства основных функций.

10 Что называется обобщенной функцией? Приведите примеры обобщенных функций.

11 Какая обобщенная функция называется а) регулярной, б) сингулярной?

12 Что называется слабой сходимостью обобщенных функций?

Формулировки теорем и формулы

1 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Перечислите свойства гамма-функции.

3 Перечислите свойства бета-функции.

4 В чем суть теоремы обращения?

5 Что называется косинус-, синус- преобразованиями Фурье?

6 Какими свойствами обладает свертка?

7 Перечислите основные операции над обобщенными функциями?

Доказательства теорем

1 Докажите непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Докажите дифференцируемость собственного интеграла, зависящего от параметра.

3 Докажите интегрируемость собственного интеграла, зависящего от параметра.

4 Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

5 Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

6 Сформулируйте и докажите признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.